

p-ISSN 1607-3274  
e-ISSN 2313-688X

# Радіоелектроніка Інформатика Управління

Радиоэлектроника  
Информатика  
Управление

Radio Electronics  
Computer Science  
Control

ISSN 1607-3274



9 771607 327005 64 >



2016/4



Запорізький національний технічний університет

## Радіоелектроніка, інформатика, управління

Науковий журнал

Виходить чотири рази на рік

№ 4(39) 2016

Заснований у січні 1999 року.

Засновник і видавець – Запорізький національний технічний університет.

ISSN 1607-3274 (друкований), ISSN 2313-688X (електронний).

Запоріжжя

ЗНТУ

2016

Запорожский национальный технический университет

## Радиоэлектроника, информатика, управление

Научный журнал

Выходит четыре раза в год

№ 4(39) 2016

Основан в январе 1999 года.

Основатель и издатель – Запорожский национальный технический университет.

ISSN 1607-3274 (печатный), ISSN 2313-688X (электронный).

Запорожье

ЗНТУ

2016

Zaporizhzhya National Technical University

## Radio Electronics, Computer Science, Control

The scientific journal

Published four times per year

№4(39) 2016

Founded in January 1999.

Founder and publisher – Zaporizhzhya National Technical University.

ISSN 1607-3274 (print), ISSN 2313-688X (on-line).

Zaporizhzhya

ZNTU

2016

**Науковий журнал «Радіоелектроніка, інформатика, управління»** (скорочена назва – РІУ) видається Запорізьким національним технічним університетом (ЗНТУ) з 1999 р. періодичністю чотири номери на рік.

Зареєстрований Державним комітетом інформаційної політики, телебачення та радіомовлення 29.01.2003 р. Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації серія КВ №6904.

**ISSN** 1607-3274 (друкований), **ISSN** 2313-688X (електронний).

Наказом Міністерства освіти і науки України № 1328 від 21.12.2015 р. «Про затвердження рішень Атестаційної колегії Міністерства щодо діяльності спеціалізованих вчених рад від 15 грудня 2015 року» **журнал включений до переліку наукових фахових видань України**, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата фізико-математичних та технічних наук.

В журналі безкоштовно публікуються наукові статті англійською, російською та українською мовами.

**Правила оформлення статей** подано на сайті: <http://ric.zntu.edu.ua/information/authors>.

Журнал забезпечує **безкоштовний відкритий он-лайн доступ** до повнотекстових публікацій.

Журнал дозволяє авторам мати авторські права і зберігати права на видання без обмежень. Журнал дозволяє користувачам читати, завантажувати, копіювати, поширювати, друкувати, шукати або посилатися на повні тексти своїх статей. Журнал дозволяє повторне використання його вмісту у відповідності з СС ліцензією CC-BY.

Опублікованими статтями присвоюється унікальний ідентифікатор цифрового об'єкта DOI.

**Журнал входить до наукометричної бази Thomson Reuters Web of Sciense.**

**Журнал реферується та індексується** у провідних міжнародних та національних реферативних журналах і наукометричних базах даних, а також розміщується у цифрових архівах та бібліотеках з безкоштовним доступом у режимі on-line (у т. ч. DOAJ, DOI, CrossRef, EBSCO, eLibrary.ru / РИНЦ, Google Scholar, Index Copernicus, INSPEC, ISSN, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, ВІНІТІ, Джерело), повний перелік яких подано на сайті: <http://ric.zntu.edu.ua/about/editorialPolicies#custom-0>.

**Журнал розповсюджується** за Каталогом періодичних видань України (передплатний індекс – 22914).

**Тематика журналу** містить: радіофізику, мікро-, нано- і радіоелектроніку, апаратне і програмне забезпечення комп’ютерної техніки, комп’ютерні мережі і телекомуникації, теорію алгоритмів і програмування, оптимізацію і дослідження операцій, міжмашинну і людино-машинну взаємодію, математичне і комп’ютерне моделювання, обробку даних і сигналів, управління в технічних системах, штучний інтелект, включаючи системи, засновані на знаннях, і експертні системи, інтелектуальний аналіз даних, розпізнавання образів, штучні нейронні і нейро-нечіткі мережі, нечітку логіку, колективний інтелект і мультиагентні системи, гібридні системи.

Усі статті, пропоновані до публікації, одержують **об'єктивний розгляд**, що оцінюється за суттю без урахування раси, статі, віросповідання, етнічного походження, громадянства або політичної філософії автора(ів).

Усі статті проходять двоступінчасте закрите (анонімне для автора) **резензування** штатними редакторами і незалежними рецензентами – провідними вченими за профілем журналу.

## РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

**Головний редактор** – Погосов В. В., д-р фіз.-мат. наук, Україна

**Заст. головного редактора** – Субботін С. О., д-р. техн. наук, Україна

**Члени редколегії:**

Андроулідакіс Й., д-р філософії, Греція

Безрук В. М., д-р техн. наук, Україна

Бодянський Є. В., д-р техн. наук, Україна, редактор розділу з управління

Васильєв С. М., д-р фіз.-мат. наук, академік РАН, Росія

Гімпліевич Ю. Б., д-р техн. наук, Україна

Горбань О. М., д-р фіз.-мат. наук, Великобританія

Дробахін О. О., д-р фіз.-мат. наук, Україна

Зайцева О. М., канд. фіз.-мат. наук, Словаччина

Камеяма М., д-р техн. наук, Японія

Карпуков Л. М., д-р техн. наук, Україна

Корніч Г. В., д-р фіз.-мат. наук, Україна, редактор розділу з радіофізики

Кулік А. С., д-р техн. наук, Україна

Лебедев Д. В., д-р техн. наук, Україна, редактор розділу з управління

Леващенко В. Г., канд. фіз.-мат. наук, Словаччина

Лиснянський А., канд. техн. наук, Ізраїль

Марковська-Качмар У., д-р наук, Польща

Олещук В. О., канд. фіз.-мат. наук, Норвегія, редактор розділу з радіоелектроніки

Онуфрієнко В. М., д-р фіз.-мат. наук, Україна

Папшицький М., д-р філософії, Польща

Піза Д. М., д-р техн. наук, Україна

Рубель О. І., канд. техн. наук, Канада

Хаханов В. І., д-р техн. наук, Україна, редактор розділу з інформатики

Шарпанських О. А., д-р філософії, Нідерланди, редактор розділу з інформатики

Рекомендовано до видання вченого радою ЗНТУ, протокол № 4 від 19.12.2016.

Журнал зверстаний редакційно-видавничим відділом ЗНТУ.

**Веб-сайт журналу:** <http://ric.zntu.edu.ua>.

**Адреса редакції:** Редакція журналу «РІУ», Запорізький національний технічний університет, вул. Жуковського, 64, м. Запоріжжя, 69063, Україна.

Тел: (061) 769-82-96 – редакційно-видавничий відділ

Факс: (061) 764-46-62

E-mail: [rvv@zntu.edu.ua](mailto:rvv@zntu.edu.ua)

© Запорізький національний технічний університет, 2016

**Научный журнал «Радиоэлектроника, информатика, управление»** (сокращенное название – РИУ) издается Запорожским национальным техническим университетом (ЗНТУ) с 1999 г. периодичностью четыре номера в год.

Зарегистрирован Государственным комитетом информационной политики, телевидения и радиовещания 29.01.2003 г. (Свидетельство о государственной регистрации печатного средства массовой информации серия КВ №6904).

**ISSN 1607-3274** (печатный), **ISSN 2313-688X** (электронный).

Приказом Министерства образования и науки Украины № 1328 от 21.12.2015 г. «Об утверждении решений Аттестационной коллегии Министерства относительно деятельности специализированных ученых советов от 15 декабря 2015 года» **журнал включен в перечень научных профессиональных изданий Украины**, в которых могут публиковаться результаты диссертационных работ на соискание ученых степеней доктора и кандидата физико-математических и технических наук.

В журнале бесплатно публикуются научные статьи на английском, русском и украинском языках.

**Правила оформления статей** представлены на сайте: <http://ric.zntu.edu.ua/information/authors>.

Журнал обеспечивает **бесплатный открытый он-лайн доступ** к полнотекстовым публикациям. Журнал разрешает авторам иметь авторские права и сохранять права на издание без ограничений. Журнал разрешает пользователям читать, загружать, копировать, распространять, печатать, искать или ссылаться на полные тексты своих статей. Журнал разрешает повторное использование его содержания в соответствии с СС лицензией CC-BY.

Опубликованным статьям присваивается уникальный идентификатор цифрового объекта DOI.

**Журнал входит в научометрическую базу Thomson Reuters Web of Sciense.**

**Журнал реферируется и индексируется** в ведущих международных и национальных реферативных журналах и научометрических базах данных, а также размещается в цифровых архивах и библиотеках с бесплатным доступом on-line (в т.ч. DOAJ, DOI, CrossRef, EBSCO, eLibrary.ru / РИНЦ, Google Scholar, Index Copernicus, INSPEC, ISSN, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, ВИНИТИ, Джэрэло), полный перечень которых представлен на сайте: <http://ric.zntu.edu.ua/about/editorialPolicies#custom-0>.

**Журнал распространяется** по Каталогу периодических изданий Украины (подписной индекс – 22914).

**Тематика журнала** включает: радиофизику, микро-, нано- и радиоэлектронику, аппаратное и программное обеспечение компьютерной техники, компьютерные сети и телекоммуникации, теорию алгоритмов и программирования, оптимизацию и исследование операций, межмашинное и человеко-машинное взаимодействие, математическое и компьютерное моделирование, обработку данных и сигналов, управление в технических системах, искусственный интеллект, включая системы, основанные на знаниях, и экспертные системы, интеллектуальный анализ данных, распознавание образов, искусственные нейронные и нейронечеткие сети, нечеткую логику, коллективный интеллект и мультиагентные системы, гибридные системы.

Все статьи, предлагаемые к публикации, получают **объективное рассмотрение**, которое оценивается по существу без учета расы, пола, вероисповедания, этнического происхождения, гражданства или политической философии автора(ов).

Все статьи проходят двухступенчатое закрытое (анонимное для автора) **рецензирование** штатными редакторами и независимыми рецензентами – ведущими учеными по профилю журнала.

## **РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ**

**Главный редактор** – Погосов В. В., д-р физ.-мат. наук, Украина

**Зам. главного редактора** – Субботин С. А., д-р. техн. наук, Украина

**Члены редколлегии:**

Андроулидакис И., д-р философии, Греция

Безрук В. М., д-р техн. наук, Украина

Бодянский Е. В., д-р техн. наук, Украина, редактор раздела по управлению

Васильев С. Н., д-р физ.-мат. наук, академик РАН, Россия

Гимпилевич Ю. Б., д-р техн. наук, Украина

Горбань А. Н., д-р. физ.-мат. наук, Великобритания

Дробахин О. О., д-р физ.-мат. наук, Украина

Зайцева Е. Н., канд. физ.-мат. наук, Словакия

Камеяма М., д-р техн. наук, Япония

Карпуков Л. М., д-р техн. наук, Украина

Корнич Г. В., д-р физ.-мат. наук, Украина, редактор раздела по радиофизике

Кулик А. С., д-р техн. наук, Украина

Лебедев Д. В., д-р техн. наук, Украина, редактор раздела по управлению

Левашенко В. Г., канд. физ.-мат. наук, Словакия

Лиснянский А., канд. техн. наук, Израиль

Марковская-Качмар У., д-р наук, Польша

Олещук В. А., канд. физ.-мат. наук, Норвегия, редактор радиоэлектроники

Онуфриенко В. М., д-р физ.-мат. наук, Украина

Папшицкий М., д-р философии, Польша

Пиза Д. М., д-р техн. наук, Украина

Рубель О. И., канд. техн. наук, Канада

Хаханов В. И., д-р техн. наук, Украина, редактор раздела по информатике

Шарпанских А. А., доктор философии, Нидерланды – редактор раздела по информатике

Рекомендовано к изданию ученым советом ЗНТУ, протокол № 4 от 19.12.2016.

Журнал сверстан редакционно-издательским отделом ЗНТУ.

**Веб-сайт журнала:** <http://ric.zntu.edu.ua>.

**Адрес редакции:** Редакция журнала «РИУ», Запорожский национальный технический университет, ул. Жуковского, 64, г. Запорожье, 69063, Украина.

Тел.: +38-061-769-82-96 – редакционно-издательский отдел

Факс: (061) 764-46-62

E-mail: [rvv@zntu.edu.ua](mailto:rvv@zntu.edu.ua)

© Запорожский национальный технический университет, 2016

**The scientific journal «Radio Electronics, Computer Science, Control»** is published by the Zaporizhzhya National Technical University (ZNTU). since 1999 with periodicity four numbers per year.

The journal is registered by the State Committee for information policy, television and radio broadcasting of Ukraine in 29.01.2003. The journal has a State Registration Certificate of printed mass media (series KB №6904).

**ISSN** 1607-3274 (print), **ISSN** 2313-688X (on-line).

By the Order of the Ministry of Education and Science of Ukraine from 21.12.2015 № 1328 “On approval of the decision of the Certifying Collegium of the Ministry on the activities of the specialized scientific councils dated 15 December 2015” **journal is included in the list of scientific specialized periodicals of Ukraine**, where the results of dissertations for Doctor of Science and Doctor of Philosophy in Mathematics and Technical Sciences may be published.

The journal publishes scientific articles in English, Russian, and Ukrainian free of charge.

The **article formatting rules** are presented on the site: <http://ric.zntu.edu.ua/information/authors>.

The journal provides policy of **on-line open (free of charge) access** for full-text publications. The journal allow the authors to hold the copyright without restrictions and to retain publishing rights without restrictions. The journal allow readers to read, download, copy, distribute, print, search, or link to the full texts of its articles. The journal allow reuse and remixing of its content, in accordance with a CC license CC-BY.

Published articles have a unique digital object identifier (DOI).

**The journal is included into Thomson Reuters Web of Science.**

**The journal is abstracted and indexed** in leading international and national abstracting journals and scientometric databases, and also placed to the digital archives and libraries with a free on-line access (including DOAJ, DOI, CrossRef, EBSCO, eLibrary.ru / РИНЦ, Google Scholar, Index Copernicus, INSPEC, ISSN, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, VINITI (All-Russian Institute of scientific and technical information), Djerelo), full list of which is presented on the site: <http://ric.zntu.edu.ua/about/editorialPolicies#custom-0>.

**The journal is distributed**:by the Catalogue of Ukrainian periodicals (the catalog number is 22914).

**The journal scope:** radio physics, micro-, nano- and radio electronics, computer hardware and software, computer networks and telecommunications, algorithm and programming theory, optimization and operations research, machine-machine and man-machine interfacing, mathematical modeling and computer simulation, data and signal processing, control in technical systems, artificial intelligence, including knowledge-based and expert systems, data mining, pattern recognition, artificial neural and neuro-fuzzy networks, fuzzy logics, swarm intelligence and multiagent systems, hybrid systems.

All articles proposed for publication receive an **objective review** that evaluates substantially without regard to race, sex, religion, ethnic origin, nationality, or political philosophy of the author(s).

All articles undergo a two-stage **blind peer review** by the editorial staff and independent reviewers – the leading scientists on the profile of the journal.

## **EDITORIAL BOARD**

**Editor-in-Chief:** V. V. Pogosov, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Ukraine

**Deputy Editor-in-Chief:** S. A. Subbotin, Doctor of Science in Engineering, Ukraine

**Members of Editorial Board:**

- I. Androulidakis, Ph. D, Greece
- V. M. Bezruk, Doctor of Science in Engineering, Ukraine
- Ye. V. Bodyanskiy , Doctor of Science in Engineering, Ukraine, Control section editor
- O. O. Drobakhin, Doctor of Science in Physics and Mathematics
- Yu. B. Gimpilevich, Doctor of Science in Engineering, Ukraine
- A. N. Gorban, Doctor of Science in Physics and Mathematics, United Kingdom
- V. I. Hahanov, Doctor of Science in Engineering, Ukraine, Computer Science section editor
- M. Kameyama, Doctor of Science, Japan
- L. M. Karpukov, Doctor of Science in Engineering, Ukraine
- G. V. Kornich, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Ukraine, Radio Physics section editor
- A. S. Kulik, Doctor of Science in Engineering, Ukraine
- D. V. Lebedev, Doctor of Science in Engineering, Ukraine, Control section editor
- V. G. Levashenko, Ph.D, Slovakia
- A. Lishnianski, Ph.D, Israel
- U. Markowska-Kaczmar, Doctor of Science, Poland
- V. A. Oleshchuk, Ph.D in Physics and Mathematics, Norway, Radio Electronics section editor
- V. M. Onufrienko, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Ukraine
- M. Paprzycki, Ph.D, Poland
- D. M. Piza, Doctor of Science in Engineering, Ukraine
- O. I. Rubel, Ph.D, Canada
- A. A. Sharpanskykh, Ph.D, Netherlands, Computer Science section editor
- S. N. Vassilyev, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Academician of Russian Academy of Sciences, Russia
- E. N. Zaitseva, Ph.D, Slovakia

Recommended for publication by the Academic Council of ZNTU, protocol № 4 dated 19.12.2016.

The journal is imposed by the editorial-publishing department of ZNTU.

**The journal web-site** is <http://ric.zntu.edu.ua>.

**The address of the editorial office:** Editorial office of the journal «Radio Electronics, Computer Science, Control», Zaporizhzhia National Technical University, Zhukovskiy street, 64, Zaporizhzhya, 69063, Ukraine.

Tel.: +38-061-769-82-96 – the editorial-publishing department.

Fax: +38-061-764-46-62

E-mail: [rvv@zntu.edu.ua](mailto:rvv@zntu.edu.ua)

© Zaporizhzhya National Technical University, 2016

## ЗМІСТ

<b>РАДІОФІЗИКА.....</b>	<b>7</b>
<i>Грохольский Я. М., Сусь Б. А., Сусь Б. Б.</i> РАДІОХВИЛІ ЯК ПОТОК ЧАСТИНОК, ЩО ПЕРЕБУВАЮТЬ У КОЛІВАЛЬНОМУ СТАНІ.....	7
<b>МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ.....</b>	<b>11</b>
<i>Василенко О. В., Петренко Я. И.</i> ПОВЫШЕНИЕ КАЧЕСТВА МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВЫБОРОМ ОПТИМАЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ СИМУЛЯЦИИ.....	11
<i>Левин В. И.</i> ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ.....	19
<i>Мотайло А. П., Хомченко А. Н., Тулученко Г. Я.</i> ПОБУДОВА БАЗИСУ БІПРАМІДІ.....	29
<i>Скрупська Л. С.</i> РЕАЛІЗАЦІЯ ІНФОРМАЦІОННИХ МОДЕЛЕЙ ПРОЦЕССА ДІАГНОСТИРОВАННЯ І ПРОГНОЗИРОВАННЯ СОСТОЯННЯ ІЗОЛЯЦІЇ ТРАНСФОРМАТОВ ТОКА.....	37
<i>Симонян С. О., Айвазян А. А.</i> К РЕШЕНИЮ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА $A(T) \cdot X(T) + X^*(T) \cdot B(T) = C(T)$ .....	44
<b>НЕЙРОІНФОРМАТИКА ТА ІНТЕЛЕКТУАЛЬНІ СИСТЕМИ.....</b>	<b>54</b>
<i>Babichev S., Lytvynenko V., Taif M. A.</i> ESTIMATION OF THE INDUCTIVE MODEL OF OBJECTS CLUSTERING STABILITY BASED ON THE K-MEANS ALGORITHM FOR DIFFERENT LEVELS OF DATA NOISE.....	54
<i>Олійник А. О., Скрупський С. Ю., Субботін С. О., Благодар'єв А. Ю., Гофман Е. О.</i> ПЛАНУВАННЯ РЕСУРСІВ ПАРАЛЕЛЬНОЇ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ПРИ СИНТЕЗІ НЕЙРО-НЕЧІТКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОБРОБКИ ВЕЛИКИХ ДАНИХ.....	61
<i>Субботін С. А.</i> КОМПЛЕКСНОЕ СОКРАЩЕНИЕ РАЗМЕРНОСТИ ДАННЫХ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ДИАГНОСТИЧЕСКИХ И РАСПОЗНАЮЩИХ МОДЕЛЕЙ ПО ПРЕЦЕДЕНТАМ.....	70
<b>ПРОГРЕСИВНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ.....</b>	<b>77</b>
<i>Литвин В. В., Бобик І. О., Висоцька В. А.</i> ЗАСТОСУВАННЯ СИСТЕМИ АЛГОРИТМІЧНИХ АЛГЕБР ДЛЯ ГРАМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ СИМВОЛЬНИХ ОБЧИСЛЕНЬ ВИРАЗІВ ЛОГІКИ ВИСЛОВЛЮВАНЬ.....	77
<i>Ляшенко А. В., Балязітов М. Р., Годлевський Л. С., Балязітов Д. М., Бузиновський А. Б.</i> ІНФОРМАЦІЙНО-ТЕХНІЧНА СИСТЕМА АВТОМАТИЗОВАНОЇ ЛАПАРОСКОПІЧНОЇ ДІАГНОСТИКИ.....	90
<i>Шмелєва Т. Р.</i> РЕЕНТЕРАБЕЛЬНАЯ МОДЕЛЬ RIP ПРОТОКОЛА В ФОРМЕ РАСКРАШЕННЫХ СЕТЕЙ ПЕТРИ.....	97
<b>УПРАВЛІННЯ У ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМАХ.....</b>	<b>104</b>
<i>Кадырова Д. Р., Кадырова А. А.</i> СТРУКТУРНЫЙ СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ.....	104
<i>Guda A. I., Mikhalyov A. I.</i> MULTI-MODELS IDENTIFICATION METHODS COMPARISON IN THE NON-LINEAR DYNAMIC SYSTEM IDENTIFICATION TASK.....	112
<i>Хобін В. А., Левінський М. В.</i> ОПТИМИЗАЦІЯ ФІЛЬТРОВ СОБСТВЕННОГО ДВІЖЕНИЯ САМОНАСТРАІВАЮЩЕЙСЯ САУ ОБЄКТОМ ТЕХНОЛОГІЧНОГО ТИПА.....	120

---

# CONTENTS

<b>RADIOPHYSICS.....</b>	<b>7</b>
<i>Grokholskyi Y. M., Sus' B. A., Sus' B. B.</i>	
RADIO WAVES AS A STREAM OF PARTICLES IN VIBRATIONAL STATE.....	7
<b>MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELLING.....</b>	<b>11</b>
<i>Vasylenko O. V., Petrenko Y. I.</i>	
IMPROVING ANALYSIS OF DYNAMICAL SYSTEMS BY SELECTION THE OPTIMAL ALGORITHM OF SIMULATION.....	11
<i>Levin V. I.</i>	
DERIVATIVES OF ELEMENTARY INTERVAL FUNCTIONS.....	19
<i>Motailo A. P., Khomchenko A. N., Tuluchenko G. Ya.</i>	
THE CONSTRUCTING OF BIPYRAMID'S BASIS.....	29
<i>Skrupskaya L. S.</i>	
IMPLEMENTATION OF INFORMATION MODELS OF DIAGNOSING AND PREDICTION OF CURRENT TRANSFORMER INSULATION STATE.....	37
<i>Simonyan S. H., Ayvazyan A. A.</i>	
TO THE SOLUTION OF ONE-PARAMETRIC MATRIX EQUATIONS OF $A(T) \cdot X(T) + X^*(T) \cdot B(T) = C(T)$ TYPE.....	44
<b>NEUROINFORMATICS AND INTELLIGENT SYSTEMS.....</b>	<b>54</b>
<i>Babichev S., Lytvynenko V., Taif M. A.</i>	
ESTIMATION OF THE INDUCTIVE MODEL OF OBJECTS CLUSTERING STABILITY BASED ON THE K-MEANS ALGORITHM FOR DIFFERENT LEVELS OF DATA NOISE.....	54
<i>Oliinyk A., Skrupsky S. Yu., Subbotin S., Blagodariov O., Gofman Ye.</i>	
PARALLEL COMPUTING SYSTEM RESOURCES PLANNING FOR NEURO-FUZZY MODELS SYNTHESIS AND BIG DATA PROCESSING.....	61
<i>Subbotin S. A.</i>	
THE COMPLEX DATA DIMENSIONALITY REDUCTION FOR DIAGNOSTIC AND RECOGNITION MODEL BUILDING ON PRECEDENTS.....	70
<b>PROGRESSIVE INFORMATION TECHNOLOGIES.....</b>	<b>77</b>
<i>Lytvyn V. V., Bobyk I. O., Vysotska V. A.</i>	
APPLICATION OF ALGORITHMIC ALGEBRA SYSTEM FOR GRAMMATICAL ANALYSIS OF SYMBOLIC COMPUTATION EXPRESSIONS OF PROPOSITIONAL LOGIC.....	77
<i>Lyashenko A. V., Bayazitov N. R., Godlevsky L. S., Bayazitov D. N., Buzynovskiy A. V.</i>	
INFORMATIONAL-TECHNICAL SYSTEM FOR THE AUTOMATIZED LAPAROSCOPIC DIAGNOSTICS.....	90
<i>Shmeleva T. R.</i>	
REENTERABLE MODEL OF RIP PROTOCOL IN COLORED PETRI NETS FORM.....	97
<b>CONTROL IN TECHNICAL SYSTEMS.....</b>	<b>104</b>
<i>Kadirova D. R., Kadirova A. A.</i>	
STRUCTURAL SYNTHESIS OF DISCRETE CONTROL SYSTEMS CONTROLLERS.....	104
<i>Guda A. I., Mikhalyov A. I.</i>	
MULTI-MODELS IDENTIFICATION METHODS COMPARISON IN THE NON-LINEAR DYNAMIC SYSTEM IDENTIFICATION TASK.....	112
<i>Khobin V. A., Levinskyi M. V.</i>	
OWN MOTION FILTERS OPTIMISATION FOR SELF-TUNING ACS WITH THE TECHNOLOGICAL TYPE OF CONTROL OBJECT.....	120

# РАДІОФІЗИКА

## РАДІОФІЗИКА

### RADIOPHYSICS

УДК 534 (07)

Грохольський Я. М.<sup>1</sup>, Сусь Б. А.<sup>2</sup>, Сусь Б. Б.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри автоматичних систем управління, Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації, Київ, Україна

<sup>2</sup>Д-р пед. наук, професор кафедри фізики, Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації, Київ, Україна

<sup>3</sup>Канд. фіз.-мат. наук, викладач кафедри нанофізики конденсованих систем Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

## РАДІОХВІЛІ ЯК ПОТІК ЧАСТИНОК, ЩО ПЕРЕБУВАЮТЬ У КОЛІВАЛЬНОМУ СТАНІ

До електромагнітних хвиль відносяться радіохвилі, світло, рентгенівське і гаммавипромінювання. Однак традиційно як в науковій, так і в навчальній літературі електромагнітні хвилі розглядаються з різних позицій. Радіохвилі завжди розглядаються як хвилі, тоді як світло представляється як електромагнітні хвилі і як потік частинок. Світло, будучи електромагнітними хвильми, що безсумнівно підтверджується експериментально таким хвильовим явищем як інтерференція, в той же час трактується як потік частинок, які мають називу фотонів. Оскільки радіохвилі, як і світло, є електромагнітними хвильми, то постає питання трактувати їх також з точки зору корпускулярного підходу. Показано, що радіохвилі як частина діапазону електромагнітних хвиль також мають двоїсту корпускулярно-хвильову природу – це і хвилі і частинки водночас. окремі частинки радіохвиль перебувають в коливальному стані, при якому відбувається перехід електромагнітної енергії частинки в масу і навпаки.

**Ключові слова:** радіохвилі, електромагнітні хвилі, корпускулярно-хвильова природа, коливальний стан, потік частинок, енергія.

### НОМЕНКЛАТУРА

- $\vec{E}$  – напруженість електричного поля;  
 $\vec{H}$  – напруженість магнітного поля;  
 $v$  – швидкість поширення хвилі;  
 $\Psi_1 = \Psi_2$  – початкові фази коливань електричного і магнітного полів;  
 $\Pi$  – густина потоку енергії;  
 $\Delta W$  – зміна енергії електромагнітної хвилі;  
 $m$  – зміна динамічної маси електромагнітної хвилі.

### ВСТУП

До електромагнітних хвиль відносяться радіохвилі, світло, рентгенівське і гаммавипромінювання. Однак традиційно як в науковій, так і в навчальній літературі електромагнітні хвилі розглядаються з різних позицій. Так, радіохвилі завжди розглядаються як хвилі, тоді як світло представляється як електромагнітні хвилі і як потік частинок – фотонів. Ми звичайно, що хвилі розповсюджуються в якомусь середовищі. Наприклад, хвилі спостерігаються як коливання води, а звук поширюється як коливання повітря. І ми знаємо, що ні в воді, ні в повітрі при поширенні хвиль нема якихось особливих «хвильових» частинок, а є коливання середовища. Але світло, будучи електромагнітними хвильми, що безсумнівно підтверджується експериментально таким хвильовим явищем як інтерференція, в той же час трактується як потік частинок, які мають називу фотонів. Те, що світло є потоком частинок незаперечно підтверджується експе-

риментально явищем фотоефекту, ефектом Комптона, дослідом Боте. Оскільки радіохвилі, як і світло, є електромагнітними хвильми, то постає питання трактувати їх також з точки зору корпускулярного підходу.

### 1 ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ

Проблема в тому, що при традиційних підходах до розуміння природи електромагнітних хвиль виникає ряд суперечностей, які не мають пояснення протягом сотні років. Дійсно, якщо радіохвилі є тільки хвильами, а не потоком якихось частинок, то невідомо що коливається при поширенні радіохвиль. Яке середовище коливається? А коли розглядати світло як потік частинок (що незаперечно), то невідомо де тут хвильовий процес? Що коливається? Разом з тим і радіохвилі і світло мають одну фізичну природу – вони є електромагнітними хвильами. Отже, існує проблема встановлення причини суперечностей, які виникають при трактуванні електромагнітних хвиль з різною довжиною хвилі, включаючи радіохвилі і світло.

### 2 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Прикладом суперечностей в поясненні природи електромагнітних хвиль може бути досить нове видання шкільного підручника [1], де світло розглядається «як потік фотонів, а фотони як кванти електромагнітного випромінювання, що мають одночасно і хвильові і корпускулярні властивості». Те, що світло, рентгенівське і гаммавипромінювання дійсно мають двоїсту природу –

що це і хвилі і частинки водночас, добре відомо і є безсумнівним: «Світло є явищем складним: в одних випадках воно поводить себе як електромагнітна хвиля, а в інших – як потік особливих частинок (фотонів)» [2]. Але цікавим є те, що електромагнітні хвилі іншого діапазону – радіохвилі, в навчальній і науковій літературі розглядаються тільки як хвильове явище. Таке розділення електромагнітних хвиль різного діапазону довжин хвиль не має фізичного обґрунтування, бо їх фізична природа однаакова, про що дуже виразно сказано у відомому навчальному посібнику В.Д. Сивухіна: «Згідно з теорією Максвелла світло є частинним випадком електромагнітних хвиль. Від усіх інших електромагнітних хвиль світло відрізняється тільки кількісно – довжиною хвилі» [3]. Оскільки світло як частина діапазону електромагнітних хвиль має двоїсту природу, то виникає проблема трактування радіохвиль також з точки зору їх двоїстості – як хвильового процесу, так і корпускулярного. Погляд на явище з іншої точки зору може відкрити інші можливості його бачення.

### 3 МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ І РЕЗУЛЬТАТИ

Електромагнітні хвилі були відкриті на основі досліджень електромагнітних явищ. Основу теорії електромагнітних хвиль створеної Максвеллом, становлять теорема про циркуляцію магнітного поля, закон електромагнітної індукції Фарадея, теорема Остроградського-Гаусса для електричного і магнітного полів [2]:

$$\oint_1 \vec{H} d\vec{l} = \int_S \frac{d\vec{D}}{dt} d\vec{s} + \int_S \vec{j} d\vec{s},$$

$$\oint_1 \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \left( \int_S \vec{B} d\vec{s} \right),$$

$$\int_S \vec{B} d\vec{s} = 0,$$

$$\int_S \vec{D} d\vec{s} = q.$$

Розв'язок системи цих рівнянь приводить до висновку про існування електромагнітних хвиль – взаємно обумовлених коливань електричного  $E_y$  і магнітного  $H_z$  полів:

$$E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kx + \psi_1),$$

$$H_z = H_{0z} \cos(\omega t - kx + \psi_2).$$

На рис. 1 графічно представлено коливання векторів напруженостей  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  електромагнітної хвилі.

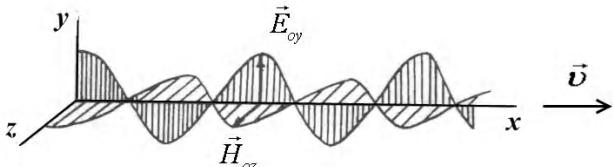


Рисунок 1 – Коливання напруженостей електричного ( $\vec{E}$ ) і магнітного ( $\vec{H}$ ) полів в електромагнітній хвилі

Важливо зазначити, що коливання  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  відбуваються з однаковою фазою, тобто  $\psi_1 = \psi_2$ . Справа в тому, що електричне і магнітне поля мають енергію. Але так як напруженості і в процесі коливань змінюються, то змінюється й енергія електромагнітної хвилі. Густота потоку енергії

$$\Pi = EH = E_{0y} H_z = E_{0y} \cos(\omega t - kx) \cdot H_{0z} \cos(\omega t - kx) =$$

$$= E_{0y} H_{0z} \cos^2(\omega t - kx).$$

Як бачимо, потік енергії змінюється в часі і в просторі і ця зміна має коливальний характер. Оскільки існує закон збереження енергії, то постає питання: у що перетворюється енергія електромагнітної хвилі, коли вона змінюється? Енергія магнітного поля переходить в енергію електричного поля і навпаки, як це має місце в коливальному контурі, не може. В коливальному контурі між електричним полем в конденсаторі і магнітним полем в катушці індуктивності існує різниця фаз  $\Delta\psi = \frac{\pi}{2}$ , що й

обумовлює коливальний процес як переход енергії електричного поля в енергію магнітного поля і навпаки, тоді як у випадку електромагнітної хвилі електричне і магнітне поля разом зростають і разом зменшуються, бо коливаються в однаковій фазі ( $\psi_1 = \psi_2$ ). Отже електричне поле хвилі переходить в магнітне поле і навпаки – не можуть. Тому постає питання: у що перетворюється енергія електромагнітної хвилі в процесі коливань? Щоб відповісти на це питання, потрібно детальніше з'ясувати, що ж таке електромагнітна хвиля? Якого типу коливання в ній відбуваються? Як вона поширюється в просторі?

Будемо виходити з того, що природа всіх електромагнітних хвиль однаакова і вона така ж, як і в світла, властивості якого вивчалися вченими дуже грунтовно. Гюйгенс більш ніж 300 років тому вважав, що середовищем для поширення світла є гіпотетичний «ефір» і відповідно до таких уявлень пояснював світлові явища. В той час взагалі хвилі уявлялися як коливання якогось середовища. Якщо кинути на воду камінець, то від місця збурення біжить хвиля як коливання води. Звук – це теж коливання повітря як середовища. Іншого типу хвиль, ніж коливання середовища, тоді не знали. Тому й світло уявлялося як коливання якогось гіпотетичного середовища «ефіру». Вважати світло хвильами спонукало явище дифракції як заходження світлових хвиль за перешкоду. При поширенні коливань в середовищі дифракція справді є хвильовим явищем. Однак була й інша точка зору на природу світла. Так, Ньютон розглядав світло як потік певних корпускул – частинок світла. Корпускулярні погляди поряд з хвильовими уявленнями існували тривалий час, але коли у 1800 р. Юнгом було відкрите явище інтерференції світла, яке як і дифракція вважалося суто хвильовим явищем, то ідея Гюйгенса, що світло – це хвилі, отримала підтвердження і запанувала надовго, до початку минулого століття, коли було відкрите явище фотоефекту – вибивання світлом електронів з металу, чим було підтверджено, що світло – частинки. Виникла так звана проблема дуалізму світла. Виходило, з одного боку, що світло – хвилі, для поширення яких потрібне середо-

вище, а з іншого боку – що світло є потоком частинок, для поширення яких середовище не потрібне. Зауважимо, що вже в самому такому представленні світла закладена суперечність, бо хвиля – явище просторове, а частинка локалізована. Уявити як одночасно можна бути хвилею у просторі і бути частинкою, локалізованою в обмеженому об’ємі – дуже проблематично. Ця проблема двоїстості природи світла дійшла до нашого часу. Доречно навести думку Ейнштейна щодо проблеми двоїстості природи світла:

«Що таке світло – хвиля чи ливень світлових корпускул?... Схоже, що нема ніяких шансів послідовно описати світлові явища, вибравши тільки яку-небудь одну з двох можливих теорій. Стан такий, що ми повинні застосовувати іноді одну теорію, а іноді другу, а час від часу одну й другу. Ми зіткнулися з трудністю нового типу. Маємо дві протилежні картини реальності, але ні одна з теорій окремо не пояснює всіх світлових явищ, тоді як сумісно вони їх пояснюють» [4].

Слід підкреслити, що незважаючи на суперечність хвильового і корпускулярного підходів, сумніву в тому, що світло є і хвилею і частинками одночасно – нема. Світло дійсно має двоїсту природу – це хвилі і частинки водночас, що встановлено експериментально. Безумовно, що проблема двоїстості стосується також радіохвиль, які також є електромагнітними хвилями. Необхідно тільки з'ясувати причину існуючих суперечностей. Детальний розгляд проблеми представлено в роботі [5], де показується, що світло як електромагнітна хвиля є певною формою руху матерії, коли один вид матерії (речовина) перетворюється в інший вид матерії (поле). Приклади переходу матерії з одного виду в інший добре відомі. Таке відбувається при поділі ядра урану під час вибуху ядерної бомби, коли частина маси ядра (речовина) переходить в енергію гаммавипромінювання (поле). Цей процес відбувається у відповідності з відомим співвідношенням  $W = c^2 m$ , яке встановлює зв'язок між масою і енергією. Відомий також зворотній перехід – з поля в речовину, коли при зустрічі двох  $\gamma$ -квантів (поле) утворюються електрон і позитрон. Тому цілком логічно допустити, що переходи з одного виду матерії в інший існують не тільки як окремі прояви природи, а можливі процеси неперервного переходу матерії з одного виду в інший як коливальна форма руху. І виявом такої форми руху є світло та інші електромагнітні хвилі, в тому числі й радіохвилі.

Оскільки в електромагнітній хвилі має місце коливання енергії і існує закон збереження енергії, то це означає, що енергія, змінюючись, повинна переходити в якийсь інший вид. Відомо, що при коливанні маятника кінетична енергія переходить в потенціальну, а потенціальна – в кінетичну, що й визначає коливальний рух. В електромагнітній хвилі, включаючи світло і радіохвилі, також існує коливання енергії, що випливає з теорії Максвелла електромагнітних хвиль. Однак теорія Максвелла не дас (і не може дати) відповіді на сакральне питання: у що перетворюється енергія електромагнітної хвилі, коли вона змінюється? Відповідь закладена у фундаментальному співвідношенні  $W = c^2 m$ , яке встановлює зв'язок між масою і енергією. Оскільки в процесі коливань енергія

змінюється, то повинна змінюватися і енергія:  $\Delta W = c^2 \Delta m$ . Тому саме це співідношення обумовлює безперервний періодичний процес переходу енергії в масу і маси в енергію:

$$\Delta W \rightarrow \Delta m \rightarrow \Delta W \rightarrow \Delta m \rightarrow \dots \quad (1)$$

Це і є хвильовий процес. Однак необхідно детальніше пояснити радіохвилю як явище просторове і природу її двоїстості. В цьому питанні також існує повна аналогія радіохвилі зі світлом. Враховуючи двоїстість природи, світло слід розглядати не просто як потік частинок, а як потік особливих частинок, кожна з яких перебуває у коливному стані типу (1) [5]. І такий потік вже являє собою хвилю, оскільки відбувається поширення коливань у просторі. При такому підході суперечність у питанні двоїстості природи світла усувається, бо одночасно є частинки і є хвильовий процес. Можна провести аналогію між потоком частинок світла і зграєю пташок у польоті, де кожна пташка (частинка) махає крилами (коливний процес) і переміщується в просторі (рис. 2).

Серед зграї можна виділити пташок, які махають крилами в однаковій фазі – разом піднімають і разом опускають. Такі пташки в просторі утворюють хвильову поверхню з певною фазою, інші пташки утворюють хвильову поверхню з іншою фазою, що відповідає усталеним уявленням про хвилі. Наочною моделлю хвиль із частинок може бути також марш колони солдатів, де кожен солдат періодично рухає ногами і таке переміщення коливань у просторі можна розглядати як хвильовий процес (рис. 3). Підкреслимо, що для поширення хвиль із частинок якесь середовище не потрібне.



Рисунок 2 – Політ птиць як модель хвильового процесу частинок, що перебувають у коливальному стані



Рисунок 3 – Марш колони солдатів як хвильовий процес

Таким же чином, як би то було незвично, електромагнітну хвилю радіодіапазону також можна трактувати як потік частинок, що коливаються з відповідною частою. Руху частинки, яка коливається і переміщується, відповідає певна довжина хвилі. За аналогією до світла, частинки якого називаються фотонами, частинки хвиль радіодіапазону умовно можемо назвати «*R*-фотонами». Потрапляючи на провідник (антену), «*R*-фотони» своїм електричним полем впливають на електрони і викликають відповідну електрорушійну силу. А далі всі процеси підсилення електромагнітних коливань розглядаються узвичасним шляхом.

Таким чином, розглядаючи електромагнітні хвилі як потік частинок, що перебувають в коливальному стані типу  $\Delta W \rightarrow \Delta m \rightarrow \Delta W \rightarrow \Delta m \rightarrow \dots$ , приходимо до розуміння, що існує зовсім інша природа хвиль, ніж це уявлялося традиційно як коливання певного середовища. І як би то було незвично, радіохвилі також треба розглядати як потік частинок, що коливаються.

## ВИСНОВКИ

Радіохвилі як частина діапазону електромагнітних хвиль мають двоїсту корпускулярно-хвильову природу – це хвилі і частинки водночас. Корпускулярно-хвильова природа визначається тим, що окремі частинки радіох-

виль перебувають в коливальному стані, при якому відбувається коливний процес переходу електричної і магнітної енергії частинки в масу і навпаки:

$$\Delta W \rightarrow \Delta m \rightarrow \Delta W \rightarrow \Delta m \rightarrow \dots$$

Потік частинок, що коливаються, утворює просторово-хвилю з добре відомими хвильовими властивостями. Насправді йдеться про те, що існує дві принципово відмінні природи хвиль – як коливання середовища і як потік частинок, яким властивий внутрішній коливальний процес.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кас'янов В. А. Фізика. Учебник для общеобразовательных школ. 11 класс / В. А. Кас'янов. – М. : «Дрофа». – 288 с.
2. Савельев И. В. Курс общей физики, т. 2 / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1978, § 104.
3. Сивухин В.Д. Общий курс физики, т. 3 / В. Д. Сивухин. – М. : Наука, 1977. – 704 р.
4. Эйнштейн А. Эволюция физики / А. Эйнштейн, Л. Инфельд. – М. : Наука. 1965. – 326 с. (Albert Einstein and Leopold Infeld. The evolution of physics. – New York : Simon and Schuster. 1954).
5. Sus' B. A. Unusual interpretation of traditional problems in physics. The third scientific-methodological edition / B. A. Sus', B. B. Sus', O. B. Kravchenko. – Kyiv : PC «Prosvita», 2012. – 121 p.

Статті надійшли до редакції 05.09.2016.  
Після доробки 22.09.2016.

Грохольский Я. М.<sup>1</sup>, Сусь Б. А.<sup>2</sup>, Сусь Б. Б.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Канд. техн. наук, доцент, кафедры автоматических систем управления, Военный институт телекоммуникаций и информатизации, Киев, Украина

<sup>2</sup>Д-р пед. наук, профессор кафедры физики, Военный институт телекоммуникаций и информатизации, Киев, Украина

<sup>3</sup>Канд. физ.мат. наук, преподаватель кафедры нанофизики конденсированных систем Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, Киев, Украина

## РАДІОВОЛНЫ КАК ПОТОК ЧАСТИЦ, КОТОРЫЕ НАХОДЯТСЯ В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ СОСТОЯНИИ

К електромагнітним волнам относяться радиоволни, свет, рентгеновське і гаммаизлучення. Однак традиційно як в науковій, так і в освітній літературі електромагнітні волни розглядаються з різних позицій. Радиоволни завжди розглядаються як волни, тоді як світ представлюється як електромагнітні волни і як потік частинок. Тоді, що світ являється електромагнітними волнами, несомненно підтверджується експериментально таким волновим явищем як інтерференція, і в той же час трактується як потік частинок, називаних фотонами. Поскольку радиоволни, як і світ, являються електромагнітними волнами, то виникає питання представляти їх також з точки зору корпускулярного підходу. Показано, що радиоволни як частина діапазона електромагнітних волн також мають двоєстенную корпускулярно-волнову природу – це і волни і частинки одночасно. Отдельні частинки радиоволн находяться в коливальному состоянии, при котором происходит переход електромагнітної енергии частинки в масу и наоборот.

**Ключевые слова:** радиоволны, електромагнітни колебания, корпускулярно-волновая природа, енергия.

Grokholskyi Y. M.<sup>1</sup>, Sus' B. A.<sup>2</sup>, Sus' B. B.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>PhD., Associate Professor, Automated Control Systems department, Military Institute of Telecommunications and Information. Kyiv, Ukraine

<sup>2</sup>PhD, Professor, Military Institute of Telecommunications and Information, Kyiv, Ukraine

<sup>3</sup>PhD, Assistant Professor, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine

## RADIO WAVES AS A STREAM OF PARTICLES IN VIBRATIONAL STATE

Electromagnetic waves are a radio, light, X-rays and gamma rays. However, traditionally electromagnetic waves considered in scientific and in academic literature in different positions. Radio waves are always considered as a waves, while light is represented as electromagnetic waves and as a stream of particles. Light as electromagnetic waves, which undoubtedly confirmed experimentally in such a phenomenon as wave interference, at the same time treated as a stream of particles, which are called photons. Since radio waves, like light, are electromagnetic waves, also the question arises to interpret them in terms of corpuscular approach. It is shown that the range of radio waves as electromagnetic waves also have dual wave-particle nature – this is the wave and a particle at the same time. Some particles of radio waves stay in the vibrational state with the transition of electromagnetic energy to particle mass and vice versa.

**Keywords:** radio waves, electromagnetic fluctuations of wave-particle nature, oscillational state, energy.

## REFERENCES

1. Kas'yanov V. A. Fizika. Uchebnik dlya obshheobrazovatel'nyx shkol. 11 klass. Moscow, Drofa, 288 p.
2. Savel'ev I. V. Kurs obshhej fiziki, t. 2. Moscow, Nauka, 1978, § 104.
3. Sivuxin V. D. Obshchij kurs fiziki, t. 3. Moscow, Nauka, 1977, 704 p.
4. E'jnshtejn A., Infel'd L. E'voluciya fiziki. Moscow, Nauka, 1965, 326 p. (Albert Einstein and Leopold Infeld. The evolution of physics. New York, Simon and Schuster, 1954).
5. Sus' B. A., Sus' B. B., Kravchenko O. B. Unusual interpretation of traditional problems in physics. The third scientific-methodological edition. Kyiv, PC «Prosvita», 2012, 121 p.

# МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

### MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELLING

УДК 621.31; 519.6

Василенко О. В.<sup>1</sup>, Петренко Я. И.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры микро- и наноэлектроники, Запорожский национальный технический университет, Запорожье, Украина

<sup>2</sup>Инженер-программист, ООО «Научно-производственное предприятие «Преобразователь-комплекс», Запорожье, Украина

## ПОВЫШЕНИЕ КАЧЕСТВА МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВЫБОРОМ ОПТИМАЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ СИМУЛЯЦИИ

Исследованы методы решения основных форм дифференциальных уравнений математических моделей однодоменных и мультидоменных динамических систем в универсальных математических процессорах, в программах автоматизированного проектирования и инжиниринга (CAS, CAD и CAE соответственно). Проанализированы противоречия между показателями алгоритмов численного интегрирования (точность, устойчивость, экономичность) и пути их оптимального согласования при настройке параметров симуляции. Наиболее часто используемые в солверах методы объединены в три группы: на основе алгоритма Рунге-Кутты, формул дифференцирования назад и комплексные алгоритмы; по каждой из групп даны области их адекватного использования. Особенности математической модели ДС, в том числе структурные сингулярности и жесткость, определены как наиболее влияющие факторы этапа моделинга на показатели качества процесса симуляции (адекватность, точность, экономичность).

Даны рекомендации по предотвращению алгоритмических сбоев при симуляции структурно-сингулярных систем, представленных в форме высокондексных DAE. Путем моделирования тестовой задачи, определены оптимальные алгоритмы для надежной симуляции жестких моделей ДС. Разработана методика выбора оптимального алгоритма численного интегрирования, которая учитывает особенности моделей. Даны рекомендации по выбору солвера и соответствующего программного обеспечения для моделирования ДС, представленных каузальными и акаузальными моделями.

**Ключевые слова:** программы моделирования, моделинг, симуляция, солверы, методы численного интегрирования, алгоритмические сбои, сингулярность, жесткость, методика.

### НОМЕНКЛАТУРА

AB2 – экстраполяционный алгоритм Адамса-Башфорта (метод трапеций);

AE – алгебраические уравнения (Algebraic Equations);

BE – неявный метод Эйлера (Backward Euler);

BDF – разностный неявный метод Гира (Backward Differentiation Formula);

CAE – автоматизированный инжиниринг (Computer Aided Engineering);

CAS – математический процессор (Computer Algebra System);

CAD – автоматизированное проектирование (Computer Aided Design);

CxDE – дифференциальные уравнения с комплексными коэффициентами;

DAE – алгебро-дифференциальные уравнения (Differential-Algebraic Equations);

DDE – дифференциальные уравнения с задержками (Delay DE);

© Василенко О. В., Петренко Я. И., 2016

DOI 10.15588/1607-3274-2016-4-2

DOPRI853 – метод Дорманда-Принца;  
ECAD – CAD для электроники (Electronics Computer Aided Design);

FE – явный метод Эйлера (Forward Euler);

IDE – дифференциальные уравнения в неявной форме (Implicit DE);

MeBDFi – модифицированный расширенный BDF (Modified extended BDF implicit);

ODAE – переопределенные уравнения (Overdetermined DAE);

ODE – обыкновенные дифференциальные уравнения (Ordinary Differential Equations);

PDE – дифференциальные уравнения в частных производных (Partial DE);

RK2, RK4 – двухэтапные методы Рунге-Кутты;

RKF45 – метод Рунге-Кутты-Фельберга;

ДС – динамическая система;

ММ – математическая модель.

## ВВЕДЕНИЕ

Программы автоматизированного проектирования, инжиниринга и моделирования (CAD, CAE, CAS) [1] предлагают для симуляции однодоменных (механических, электронных и т.д.) и мультидоменных динамических систем (ДС) набор методов численного интегрирования дифференциальных и алгебро-дифференциальных уравнений, вид и форма которых зависит от принятых допущений при формировании математической модели (ММ) системы на этапе моделинга. Эти методы объединяются в так называемые солверы вместе с дополнительными алгоритмами, предназначенными для обеспечения эффективного моделирования систем в различных программных средах, однако достаточно часто на практике результаты моделирования ДС неадекватны, несмотря на заявленную высокую точность ММ.

Причина этого заключается в том, что этап симуляции может стать невозможным, или идти с алгоритмическими сбоями, если не учтены особенности модели, синтезированной на этапе моделинга (жесткость, сингулярность и т.д.). Единого методического похода в решении проблем подобного рода не существует, таким образом, актуализируется задача повышения эффективности моделирования ДС за счет расширения методического обеспечения этапа симуляции путем формирования подходов к оптимальному выбору метода интегрирования систем уравнений ММ.

Объектом исследования является процесс моделирования ДС в программах CAD, CAE, CAS, в частности, изучение влияния особенностей этапа моделинга на показатели качества этапа симуляции и, как следствие – на качество анализа временных характеристик (переходных процессов) в целом. Предметом исследования являются методы численного интегрирования и солверы программ автоматизированного моделирования, в том числе изучение степени применимости явных и неявных методов, которые с точки зрения области устойчивости являются дуальными при одинаковом порядке (точности); при этом явные методы критичны к выбору шага интегрирования, а для неявных методов существует противоречие между точностью и устойчивостью, как и ряд дополнительных проблем, связанных со сходимостью процедуры линеаризации, выполняемой на каждом шаге интегрирования.

Цель работы – разработка методики выбора метода решения уравнений математической модели ДС на этапе симуляции, который гарантирует высокое качество моделирования согласно критерии адекватности, точности, экономичности, и при этом учитывает особенности ММ (жесткость, структурные сингулярности), полученные на этапе моделинга.

## 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для достижения поставленной цели, необходимо последовательно решить ряд задач: исследовать и классифицировать формы уравнений ММ динамических систем; исследовать алгоритмы их решения (методы численного интегрирования) и солверы (программные комплексы для решения уравнений) программ CAD/CAE/CAS; а также наработать рекомендации, способствующие повышению эффективности моделирования ДС.

## 2 ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР

В настоящее время существует множество инструментальных средств для автоматизированного моделирования ДС [1]. Некоторые из них хорошо известны и популярны (MATLAB \ Simulink, Maple \ MapleSim, VisSim), другие не столь широко распространены (SimApp, 20-sim, SamSim, AMESim). Часть пакетов универсальна, и может быть использована для моделирования сложных ДС, состоящих из подсистем (доменов) с разными физическими свойствами (AMESim, 20-sim, SimulationX). Иные имеют узкую специализацию, или ориентированы на определенный домен (Vensim, IThink, Berkeley Spice, ACSLx, Powersim, MedModel, Arena). Возможности большинства пакетов в значительной мере перекрываются, и подходы к решению одних и тех же задач у них приблизительно одинаковы [2, 3], что дает возможность обобщить методику выбора оптимального алгоритма симуляции. Все программы моделирования фактически являются математическими процессорами разной степени специализации (CAS можно назвать универсальными процессорами), таким образом, на основе анализа методов численного интегрирования, которые составляют ядро солверов программ, можно обозначить область их применимости/адекватности и разработать общие рекомендации по применимости программных продуктов для исследования ДС с выявленными особенностями их моделей.

Рассмотрим методы интегрирования в симуляторах CAE/CAD/CAS. Математические модели одно- и мультидоменных ДС, в зависимости от принятых упрощений и допущений на этапе структурного и параметрического синтеза модели (моделинга), могут быть представлены системами:

- алгебраических уравнений (AE) для анализа статики;
- обыкновенных дифференциальных уравнений (ODE);
- алгебро-дифференциальных уравнений (DAE), определенных в т.ч. (ODAE);
- дифференциальных уравнений в неявной форме (IDE), с задержками (DDE), с комплексными коэффициентами (CxDE), в частных производных (PDE) и так далее.

Алгоритмы решения этих уравнений реализованы и объединены со вспомогательными алгоритмами в солверах (solvers) [2]. Методы численного интегрирования (их еще называют методами дискретизации / алгебраизации) характеризуются:

- величиной шага по времени и его адаптивностью;
- способом вычисления следующей точки (явные и неявные);
- порядком точности/метода, что определяется максимальной степенью аппроксимирующего выражения, и возможностью его изменения;
- устойчивостью (характеризует способность алгоритма продуцировать решение в переделах заданной точности в условиях широкой вариации величины шага);
- количеством учтенных на текущем шаге предыдущих шагов (одношаговые и многошаговые методы).

К альтернативным алгоритмам относятся специальные методы непосредственного решения ODE второго порядка (классические методы работают с системами

ODE первого порядка, полученными из уравнений высокого порядка), геометрические интеграторы (симплексические, симметричные, Мозера-Веселова), методы для систем с квантованным состоянием [3]. Альтернативные алгоритмы не получили широкого распространения в современных программах моделирования ДС.

Для вычисления значения функции на текущем шаге в явных алгоритмах необходимы значения функции и ее производной из предыдущего шага, а в неявных методах эту производную необходимо спрогнозировать на текущем шаге с помощью дополнительных алгоритмов, что делает их менее экономичными. Однако, для явных методов площадь области устойчивости всегда меньше, чем у неявных, но при увеличении шага в явных методах она возрастает, а у неявных – уменьшается [4]. Неявные и многошаговые методы, как правило, не требуют установления величины шага, он адаптируется автоматически из соображений обеспечения требуемой точности. Методы второго и высших порядков – нелинейные, причем, чем выше порядок точности, тем больше дополнительных компонент в формуле метода необходимо рассчитывать, тем больше время моделирования [2, 4].

В программах моделирования достаточно широко используются явные одношаговые методы семейства Рунге-Кутты, являющиеся многостадийными, и выполняющие несколько промежуточных шагов (minor steps); после чего осуществляется основная стадия (major step), что позволяет увеличить точность решения, используя при этом информацию только с одного текущего шага.

Алгоритмы с прогнозом-коррекцией второго и высших порядков выполняют два расчета функции на каждом шаге, при этом в качестве предиктора обычно используется явный метод Адамса-Башфорта, а в качестве корректора – неявный Адамса-Мултона. Многошаговые (линейные) методы (Гира, Адамса-Башфорта, Адамса-Мултона) используют информацию с предыдущих шагов. Отдельным случаем линейных методов являются явный и неявный Эйлера, который можно принять соответственно как Адамса-Башфорта и Адамса-Мултона первого порядка с одним шагом.

Поскольку существует противоречия между критериями устойчивости (явные, неявные) и точности (порядок метода), точности и экономичности (затраты машинного времени), встает задача оптимального выбора метода интегрирования и параметров симуляции, осо-

бенно для жестких моделей [4], с большим разбросом постоянных интегрирования.

В таблицу 1 сведены основные методы, которые широко используются в симуляторах, отсортированные согласно упомянутым выше критериям и областям применимости.

Представленные в таблице методы можно сгруппировать следующим образом.

1. Методы на базе алгоритма Рунге-Кутты: RK2 та RK4 – двухэтапные, с вычислением промежуточной точки [2]; RKF45 и Дорманда-Принца (DOPRI853) требуют от 4 до 6 промежуточных вычислений функции [5].

2. Методы на основе формул дифференцирования назад: метод Гира (BDF) переменного порядка (1–6) с первым порядком производных [5, 6], который запускает на каждом шаге итерационный процесс линеаризации методами простой итерации, Брайдена, Ньютона-Рафсона; MeBDFi – модифицированная расширенная формула дифференцирования назад [5].

3. Комплексные алгоритмы: VODE и Vode Adams, состоят из многошагового неявного метода Адамса-Мултона (Adams-Moulton) переменного порядка (1–12) и шага, и многошагового метода BDF переменного порядка (1–5) и шага; результирующая нелинейная система алгебраических уравнений решается итерационным методом линеаризации на каждом шаге интегрирования [4].

Солверы в современных программах CAE/CAD/CAS имеют в своем составе не только методы интегрирования, но ряд дополнительных алгоритмов, которые повышают эффективность и надежность решения уравнений и их систем. Назовем несколько комплексных солверов, написанных на разных языках программирования [6–11]:

- deSolve (для решения ODE, DAE, PDE, DDE);
- DEBDF (метод BDF переменного порядка (1–5) для очень жестких систем);
- DASSL (на основе методов Гира, BDF третьего и пятого порядка);
- LSODA, LSODE, LSODES, LSODAR, VODE (семейство Ливерморовских алгоритмов для жестких и нежестких ODE с автоматическим определением проблемы);
- DERKF (на основе метода Рунге-Кутты пятого порядка для решения нежестких и умеренно жестких систем, когда высокая точность не нужна);
- DASPK (для ODE, DAE та DAE в линейно-неявной форме, использует комбинацию методов, в т.ч. BDF);

Таблица 1 – Характеристики методов интегрирования в симуляторах

Метод симуляции	Порядок метода	Явный (Я)/ Неявный (Н)	Одно- (О)/ Много- (М) шаговый	Для моделей: жестких (Ж); мягких (М)	Для IDE	Для DAE	шаг: V – перем. C – пост.
FE	1	Я	O	M	–	–	C
BE	1	Н	O	M	+	–	C
AB2	2	Я	M (2)	M	–	–	C
RK2/ RK4	2/4	Я	O	M	–	–	C
RKF45	4/5	Я	O	M	–	–	V
DOPRI853	3, 5, 8	Я	O	Ж	–	–	V
VOD E	BDF	1-5	H	M (перем.)	Ж	–	V
	Adams	1-12	H	M (перем.)	M	–	V
BDF/ MeBDFi	1-6	H	M (перем.)	Ж	+	+	V

- ODEDC (для систем смешанных дискретно-непрерывных ODE);
- RADAU5 (для жестких ODE и линейно-неявных DAE, реализует трехстадийный метод (RADAUIIA) Рунге-Кутты 5 порядку с регулированием шага);
- MeBDFDAE (модифицированный алгоритм BDF для жестких ODE та DAE);
- Spice (семейство алгоритмов для SPICE-совместимых ECAD-программ [11], базируется на алгоритмах BDF и VODE).

### 3 МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Если модель построена корректно, компилятор сможет подготовить код для симуляции, но в процессе симуляции исследователь может столкнуться с проблемами:

- 1) алгоритм симуляции не может быть использован для данной модели;
- 2) метод может быть использован, но симуляция дает неадекватный результат;
- 3) алгоритм дает адекватный результат, но низкой точности.

Первая проблема может в некоторых случаях быть разрешена или за счет смены формы представления модели, или путем смены программного обеспечения для моделирования. Так, для ММ в форме DAE и ODAE не может быть использован алгоритм интегрирования ODE, если отсутствует алгоритм предварительного преобразования уравнений. Кроме того, модель может быть представлена в акаузальной форме, то есть системой уравнений, не упорядоченной по причинно-следственному принципу; или иметь структурные сингулярности. Проблемы 2 и 3 решаются коррекцией модели, выбором другого метода интегрирования в солвере, уменьшением максимального временного шага, однако вторая проблема иногда возникает при алгоритмических сбоях (потеря сходимости, устойчивости), если параметры симуляции подобраны не оптимально [4]. Способы решения проблем подобного рода приведены ниже.

**Структурные сингулярности: рекомендации по предотвращению алгоритмических сбоев.** Достаточно часто в моделях ДС есть так называемые алгебраические петли (Algebraic Loops), которые усложняют симуляцию запуском вспомогательных алгоритмов. Например, применение алгоритма Тарьяна к акаузальным ММ не приводит к каузализации всех уравнений и полученная система не будет полностью отсортированной [9]. В таком случае, для решения систем линейных алгебраических уравнений можно применять алгоритм релаксации (Relaxation Algorithm), являющийся символьической реализацией метода Гаусса (Gaussian elimination) без обратного хода, а для нелинейных алгебраических петель может применяться разрывающая техника (Tearing Algorithm), включающая алгоритм Ньютона-Картесона итераций, или диакоптический метод подмены уравнений (Equation Substitution Technique) [6]. Эти техники могут быть объединены в солвере.

Такие структурные сингулярности, как алгебраические петли могут приводить к росту времени симуляции, а иногда и к ее останову. Для решения указанных проблем можно рекомендовать следующие действия:

а) сменить порядок вычислений. В каузальных моделях, которые являются отсортированным по причинно-следственному принципу набором уравнений (Equation Model), можно изменить порядок вычислений (в CAS). В моделях на основе связанных графов (в CAE) порядок расчетов может быть изменен путем введения каузальной информации вручную (Hand-defined Causality);

б) ввести паразитные элементы накопления энергии (например, емкости) в звенья обратной связи в акаузальных моделях (в ECAD и CAE), однако их некорректные значения могут вызвать осцилляции при переходных процессах, ввести большие полюса в уравнения состояния, что приведет к увеличению времени симуляции;

в) удалить из алгебраических петель лишние элементы, которые несущественно влияют на параметры выходной функции; объединить однотипные элементы на этапе моделинга (топологические преобразования).

Кроме алгебраических петель, бывают и другие структурные сингулярности (топологические вырождения) [4], например, при отсутствии базовой опорной точки отсчета значения переменных базиса (в ECAD – это заземление для отсчета потенциалов узлов); при определенном соединении элементов (контур из емкостей, звезда из индуктивности и т.д.). При этом невозможно сформировать координатный базис независимых переменных и начальные условия. Существует несколько путей решения таких проблем, в частности, рекомендуется выполнять необходимые топологические преобразования на этапе моделинга. На этапе симуляции можно рекомендовать алгоритм Пантелидеса [6], при котором система DAE редуцируется до системы с алгебраической петлей, от которой избавляются рассмотренными выше способами. Хорошие результаты дает также использование неявных методов интегрирования.

Вообще, структурно-сингулярные системы описываются в форме высокониндексных DAE. Индексы (ранги) возмущения (Perturbation Index):

- DAE нулевого ранга (index-0) не содержат сингулярностей;
- DAE первого ранга (index-1) содержат только алгебраические петли;
- высокониндексные DAE содержат петли и иные структурные сингулярности.

Можно рекомендовать такие подходы для решения систем высокониндексных DAE:

- 1) использовать неявные алгоритмы интегрирования (BDF и MeBDFi);
- 2) понижать индекс с помощью символьических преобразований DAE к ODE (некоторые CAE [9] перед симуляцией символьически редуцируют модель: снижают порядок ODE и индекс системы), после чего запускаются явные методы интегрирования.

Таким образом, индекс возмущения модели является одним из ограничений при выборе алгоритма симуляции.

**Проблема жесткости модели и способы ее решения.** Структурная сложность ММ, нелинейность характеристик элементов и наличие динамических звеньев, постоянные времени которых отличаются на несколько порядков, могут привести к появлению жестких (stiff) составляющих в разных частях модели системы

(«пространственная жесткость»), или на разных интервалах времени («временная жесткость»). Жесткость может зависеть от:

- разброса собственных значений Якобиана (матрицы коэффициентов для нелинейных ODE, PDE, DAE);
- размерности системы (количества элементов, независимых переменных/уравнений);
- требований по точности симуляции;
- диапазона времени модельного эксперимента.

## 4 ЭКСПЕРИМЕНТЫ

При исследовании жесткой схемы с пропорционально-интегрирующими блоками на интервале 0...1с (рис. 1), в CAE-программе 20-sim [9], получены такие данные: при сохранении адекватности результата, наименьшее количество вычислений показал метод VODE на основе алгоритма Адамса-Мултона (255 вычисления), а самое большое – метод RKF45 (1887 вычисления); неплохой результат дал BDF (263 вычисления). При интегрировании явным методом Эйлера с фиксированным шагом (0,001 с) – 1001 вычисления, при этом точность была много ниже, чем в предыдущих экспериментах. Увеличение размера шага привело к потере устойчивости алгоритма и дало неадекватные результаты моделирования.

Таким образом, симуляция жестких систем возможна на основе явного или неявного алгоритма интегрирования, но эффективность и точность будут разными [2], при этом одношаговые методы низких порядков менее экономичные и склонны к потере устойчивости / адекватности.

## 5 РЕЗУЛЬТАТЫ

**Методика выбора алгоритма моделирования.** Для получения адекватного результата симуляции, выбор метода интегрирования в зависимости от особенностей модели можно осуществлять по методике, представленной в виде алгоритма на рис. 2.

Методика получена при начальном допущении о непрерывности модели; для дискретных систем можно рекомендовать использовать алгоритмы с переменным шагом и избегать появления алгебраических петель, поскольку они создают зоны псеводинамики и нарушают стационарность поведения модели.

Таким образом, области адекватного использования методов: FE, BE та AB2 – для нежестких моделей без сингулярностей; группа RK – преимущественно для быстрого решения нежестких или средне-жестких уравнений с приемлемой точностью; DOPRI – для более точного решения нежестких и жестких ODE; комплексные алгоритмы VODE, Vode Adams для жестких и нежестких моделей в явной форме ODE, переходные процессы в которых содержат колебание с малым демпфированием. Для симуляции очень жестких моделей наиболее эффективны неявные и комбинированные многошаговые методы.

Если смена алгоритма симуляции не приводит к улучшению результатов моделирования, рекомендуется коррекция модели: вначале параметрическая / компонентная, затем (если необходимо), – структурная / топологическая оптимизация.

**Рекомендации по выбору и настройке солвера.** Для эффективного моделирования ДС, которые (как правило) представлены DAE, могут быть рекомендованы такие солверы, как DASSL, MEXX; для электронного домена – преимущественно Spice (в ECAD), поскольку BDF и/или MeBDFi, которые лежат в их основе, предназначены для решения жестких и высокониндексных DAE, которые имеют производные каузальности (Derivative Causalities) и алгебраические петли. Для нежестких моделей рекомендуется использовать солверы, которые содержат как явные, так и неявные методы (Spice) [4]. Для моделирования систем с незатухающими колебаниями с индексом сингулярности до 3 включительно, рекомендуется солвер MeBDFDAE на основе метода MeBDFi.

Следует отметить, что эти солверы требуют грамотного определения начального приближения переменных и количества итераций для обеспечения сходимости методов линеаризации, которые ассоциированы с алгоритмами неявного интегрирования. Кроме этого, при высокой скорости переходных процессов в ДС, неявный алгоритм для обеспечения точности расчета уменьшает шаг и повышает порядок метода, что означает увеличение зоны риска по потере устойчивости алгоритма и адекватности результатов. Поэтому рекомендуется при симуляции жестких моделей (например, устройств си-

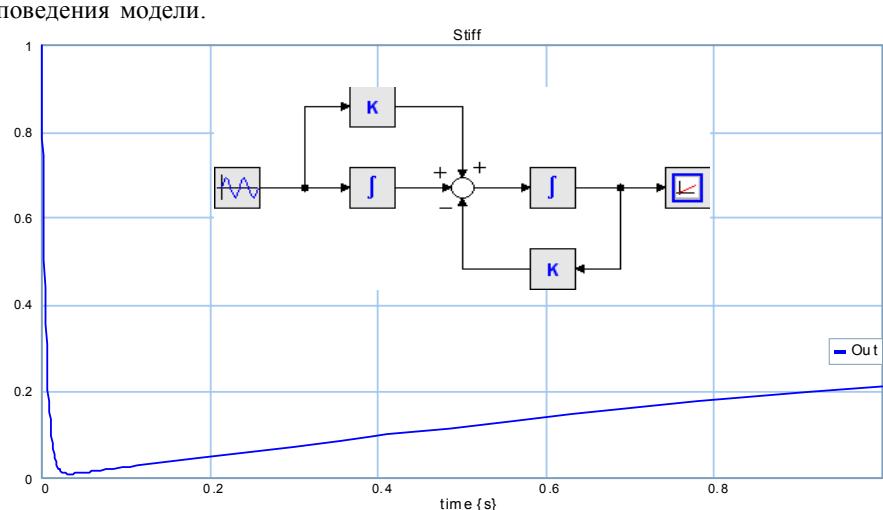


Рисунок 1 – Пример жесткой модели в 20-sim: структура и осциллограмма

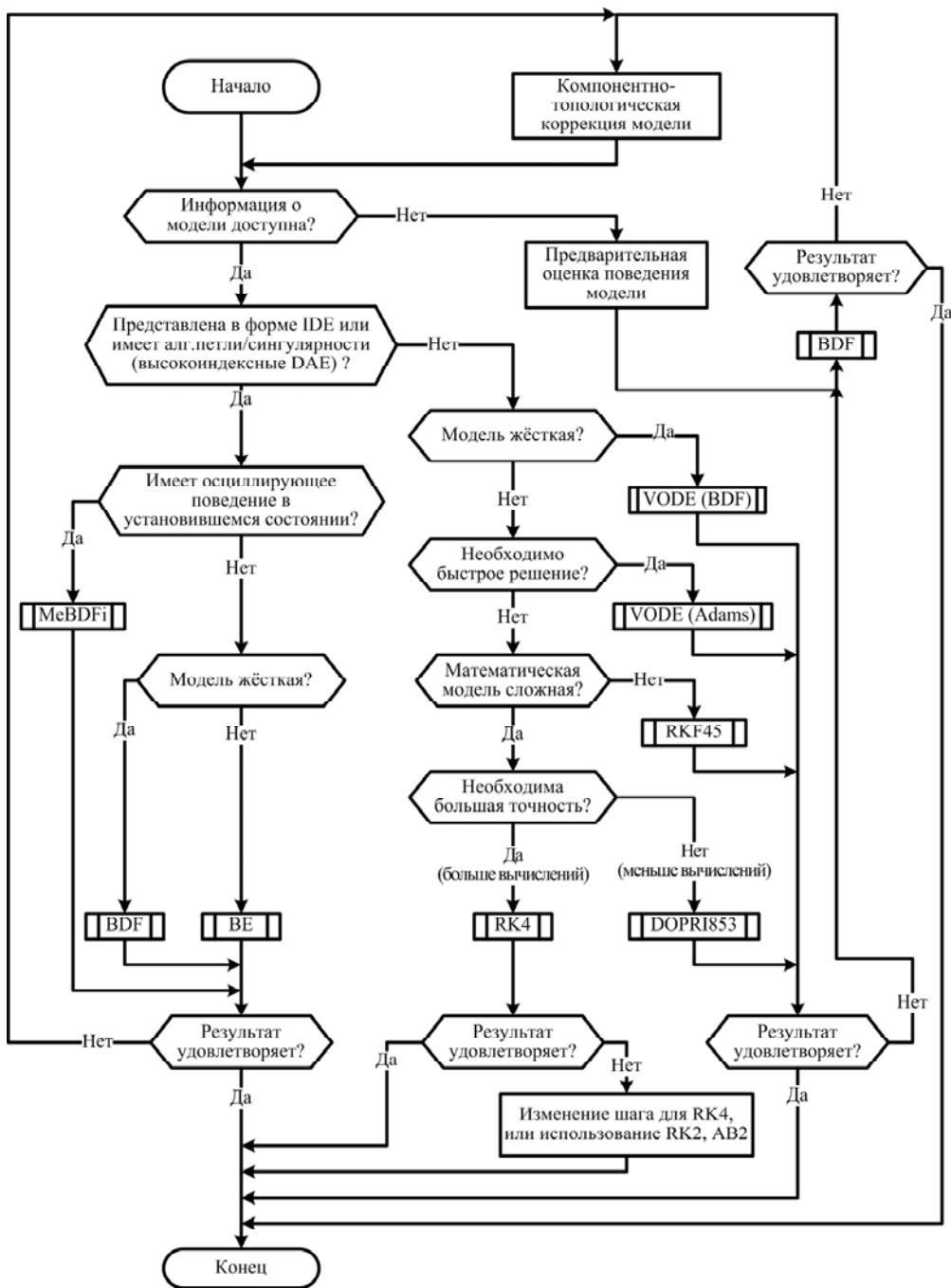


Рисунок 2 – Алгоритм выбора оптимального метода интегрирования

ловой или аналого-цифровой электроники, мехатронных систем) уменьшать точность моделирования: задавать абсолютную погрешность в интервале  $10^{-6}$ – $10^{-9}$ , относительную – до 0,01; увеличивать количество допустимых итераций метода линеаризации (от 10 до 1000) [4].

Несмотря на то, что количество доступных алгоритмов в CAS больше, чем в объектно-ориентированных CAD, в последних, благодаря дополнительным методам повышения надежности вычислений, предоставляются хорошие возможности для эффективного моделирования ДС, в том числе, представленных в акаузальной форме, жестких и с топологическими вырождениями. Динамические системы,

представленные каузальными моделями, рекомендуется моделировать в программах класса CAE.

## ВЫВОДЫ

Результатом исследований является методика выбора алгоритма симуляции, имеющая элементы научной новизны, поскольку она устанавливает в качестве новых критерии выбора – особенности модели (форму уравнений, структурную сингулярность, жесткость), учитывая при этом и требования к вычислительному процессу (точность, экономичность). Разработанная методика расширяет и дополняет методическое обеспечение автоматизированного моделирования ДС в программах CAD, CAE, CAS.

Практическая ценность методики, рекомендаций по выбору программного обеспечения и настройки параметров солвера состоит в том, что их применение позволяет повысить адекватность, точность и экономичность модельного эксперимента в программах автоматизированного проектирования и инжиниринга, что, в свою очередь, способствует повышению качества принимаемых решений при проектировании ДС.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. List of CAx companies [Electronic resource]. – Access to the site: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_CAx\\_companies](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_CAx_companies)
2. Душин С. Е. Моделирование систем и комплексов / С. Е. Душин, А. В. Красов, Ю. В. Литвинов. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2010. – 177 с.
3. Клиничев Н. В. Обзор архитектурного построения программ математического моделирования динамических систем [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://model.exponenta.ru/simkernel.html>
4. Переверзев А. В. Запобігання алгоритмічних збоїв систем ECAD / А. В. Переверзев, О. В. Василенко, Р. В. Прокопенко // Радіоелектроніка, інформатика, управління. – 2006. – № 1. – С. 123–128.
5. Press W. H. Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing (3rd ed.) / [Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P.] – Cambridge University Press, 2007. – 1235 p.
6. Cellier F. E. Continuous system simulation / F. E. Cellier, E. Kofman. – Springer Verlag, New York, 2006. – 643 p.
7. Evans J. High-level modelling tools [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://cas.web.cern.ch/cas/Sweden-2007/Lectures/Web-versions/Evans.pdf>
8. Hindmarsh Alan C. ODEPACK, A Systematized Collection of ODE Solvers / Hindmarsh Alan C. – Scientific Computing, North-Holland, Amsterdam, 1983. – P. 55–64.
9. Kleijn Ir. C. 20-sim 4.3 Reference Manual / Ir. C. Kleijn, Ir. M. A. Groothuis, Ir. H. G. Differ // Controllab Products B. V. – 2012. – 1099 p.
10. Manca D. The solution of DAE systems by a numerically robust and efficient solver / D. Manca, G. Buzzi-Ferraris // 17th European Symposium on Computer Aided Process Engineering – ESCAPE17, 2007 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.nt.ntnu.no/users/skoge/prost/proceedings/escape17/papers/T1-108.pdf>.
11. Spice algorithm overview [Electronic resource]. – Access to the site: <http://www.ecircuitcenter.com/SpiceTopics/Overview/Overview.htm>

Статья поступила в редакцию 21.06.2016.  
После доработки 01.07.2016.

Василенко О. В.<sup>1</sup>, Петренко Я. І.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри мікро- та наноелектроніки, Запорізький національний технічний університет, Запоріжжя, Україна

<sup>2</sup>Інженер-програміст, ТОВ «Науково-виробниче підприємство «Преобразувач-комплекс», Запоріжжя, Україна

## ПІДВІЩЕННЯ ЯКОСТІ МОДЕлювання ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ВИБОРОМ ОПТИМАЛЬНИХ АЛГОРІТМІВ СИМУЛЯЦІЇ

Досліджено методи розв'язання основних форм диференціальних рівнянь математичних моделей однодоменних і мультидоменних динамічних систем в універсальних математичних процесорах, в програмах автоматизованого проектування та інжинірингу (CAS, CAD і CAE відповідно). Проаналізовано протиріччя між показниками алгоритмів числового інтегрування (точність, стійкість, економічність) і шляхи їхнього оптимального узгодження при налаштуванні параметрів симуляції. Найбільш вживані в солверах методи об'єднані в три групи: на основі алгоритму Рунге-Кутти, формул диференціювання назад і комплексні алгоритми; по кожній з груп надані області їхнього адекватного застосування. Особливості математичної моделі ДС, в тому числі структурні сингулярності й жорсткість, визначені як фактори етапу моделінгу, що мають найбільший вплив на показники якості процесу симуляції (адекватність, точність, економічність).

Наведені рекомендації для запобігання алгоритмічних збоїв при симуляції структурно-сингулярних систем, представлених в формі високоіндексних DAE. Шляхом моделювання тестової задачі, визначені оптимальні алгоритми для надійної симуляції жорстких моделей ДС. Розроблено методику вибору оптимального алгоритму числового інтегрування, яка враховує особливості моделей. Надано рекомендації з вибору солвера та відповідного програмного забезпечення для моделювання ДС, представлених каузальними і акаузальними моделями.

**Ключові слова:** програми моделювання, моделінг, симуляція, солвери, методи числового інтегрування, алгоритмічні збої, сингулярність, жорсткість, методика.

Vasylenko O. V<sup>1</sup>, Petrenko Y. I.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>PhD, Associate Professor, Associate Professor of Micro- & nanoelectronics Department, Zaporizhzhya National Technical University, Zaporizhzhya, Ukraine

<sup>2</sup>Middle Software Engineer, Research and Development Enterprise «Preobrazovatel-complex», Zaporizhzhya, Ukraine

## IMPROVING ANALYSIS OF DYNAMICAL SYSTEMS BY SELECTION THE OPTIMAL ALGORITHM OF SIMULATION

Numerical solution methods of the main forms of differential equations for mathematical modeling of single-domain and multidomain dynamic systems in universal mathematical processors, in computer-aided design and engineering programs (CAS, CAD and CAE, respectively), were investigated in this work. The contradictions between the performance of numerical integration algorithms (accuracy, stability, economical) and the ways of their optimal matching when configuring the parameters of simulation have been analyzed. The methods, which most commonly used in solvers, can be combined into three groups: based on the Runge-Kutta algorithm, backward differentiation formulas and complex algorithms; for each of the group the adequate fields of application have been given. The factors of modeling stage (features of DS mathematical model, including structural singularity and stiffness), which have the most influence at the quality indicators (criteria) of the simulation process (the adequacy, accuracy, cost-effectiveness) have been determined. Features of mathematical model, including structural singularity and stiffness, have been determined as the factors of modeling stage, which have the most influence at the quality indicators (criteria) of the simulation process (the adequacy, accuracy, cost-effectiveness).

Recommendations for prevention of algorithmic failures during simulation of structurally singular systems, which presented as high-index DAE, are given. By the results of test circuit modeling, the optimal algorithm for robust simulation of dynamic systems with varying degrees of stiffness has been defined. The universal procedure of choosing the optimal algorithm of simulation, which takes into account the features

of the models, has been designed. The recommendations for choosing of solver and related software for the simulation of causal and a-causal models of DS have been presented in this paper.

**Keywords:** simulation software, modeling, simulation, solvers, numerical integration methods, algorithmic failures, singularity, stiffness, methodical support.

## REFERENCES

1. List of CAx companies (2015) [Online] Available from: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_CAx\\_companies](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_CAx_companies) [Accessed: 28 October 2015]
2. Dushin S. E., Krasov A. V., Litvinov Yu. V. Modelirovaniye sistem i kompleksov. Sankt-Peterburg, SPbGU ITMO, 2010, 177 p.
3. Klinachev N. V. Obzor arxitekturnogo postroeniya programm matematicheskogo modelirovaniya dinamicheskix sistem [E'lektronnyj resurs]. Rezhim dostupa: <http://model.exponenta.ru/simkernel.html>
4. Pereverzjev A. V., Vasylenko O. V., Prokopenko R. V. Zapobigannja algorytmichnyh zboi'v system ECAD, *Radioelektronika, informatyka, upravlinnja*, 2006, No. 1, pp. 123–128.
5. Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P. Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing (3rd ed.). Cambridge University Press, 2007, 1235 p.
6. Cellier F. E., Kofman E. Continuous system simulation. Springer Verlag, New York, 2006, 643 p.
7. Evans J. High-level modelling tools [Electronic resource]. Access to the site: <http://cas.web.cern.ch/cas/Sweden-2007/Lectures/Web-versions/Evans.pdf>
8. Hindmarsh Alan C. ODEPACK, A Systematized Collection of ODE Solvers. *Scientific Computing*, North-Holland. Amsterdam, 1983, pp. 55–64
9. Kleijn Ir. C., Groothuis Ir. M. A., Differ Ir. H. G. 20-sim 4.3 Reference Manual, *Controllab Products B.V.*, 2012, 1099 p.
10. Manca D., Buzzi-Ferraris G. The solution of DAE systems by a numerically robust and efficient solver, *17th European Symposium on Computer Aided Process Engineering – ESCAPE17, 2007* [Electronic resource]. Access to the site: <http://www.nt.ntnu.no/users/skoge/prost/proceedings/escape17/papers/T1-108.pdf>.
11. Spice algorithm overview [Electronic resource]. Access to the site: <http://www.ecircuitcenter.com/SpiceTopics/Overview/Overview.htm>

УДК 62–519.7/8

Левин В. И.

Д-р техн. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Пензенского государственного технологического университета,  
Пенза, Россия

## ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрены задачи, связанные с вычислением производных от интервально-определеных функций. Эти задачи актуальны при изучении систем с присущей им той или иной степенью неопределенности (недетерминированные системы). Именно, речь идет о простейших системах, которые описываются элементарными интервально-определенными функциями. Соответственно этому решаются задачи нахождения производных от элементарных функций указанного вида. При этом используются полученные ранее формулы и приемы вычисления производных от любых интервально-определеных функций, а также формулы двух типов, которые позволяют вычислять указанные интервальные производные. Формулы первого типа выражают производные в закрытой интервальной форме, которая требует использования аппарата интервальной математики. Формулы второго типа выражают производные в открытой интервальной форме, в виде двух формул, первая из которых выражает нижнюю границу интервала, представляющую искомую производную, а вторая – верхнюю границу, и вычисление производной от интервальной функции сводится к вычислению двух вещественных функций. С помощью изложенного математического аппарата были найдены производные от следующих элементарных интервальных функций: интервальной константы, интервальной степенной функции, интервальной показательной функции, интервальной экспоненциальной функции, интервальной логарифмической и натурально-логарифмической функций, интервальных тригонометрических функций (синуса, косинуса, тангенса и котангенса), интервальных обратных тригонометрических функций (арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса). Формулы всех производных даны в открытой интервальной форме. Указано отличие интервальных производных элементарных функций от классических производных соответствующих обычных элементарных функций.

**Ключевые слова:** интервал, интервальная функция, интервальная производная, интервально-дифференциальное исчисление, интервальные вычисления.

### НОМЕНКЛАТУРА

$x_1, x_2, \dots, x_n$  – вещественные независимые переменные;

$y_1, y_2, \dots, y_m$  – вещественные зависимые переменные;  
 $f, f_1, f_2$  – детерминированные функции;

$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$  – интервальные независимые переменные;

$\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_m$  – интервальные зависимые переменные;  
 $\tilde{f} = [f_1, f_2]$  – интервальная функция;

$\tilde{f}'(\tilde{x})$  – интервальная производная;  
 $\tilde{f}^{(n)}(\tilde{x})$  – интервальная производная  $n$ -го порядка.

### ВВЕДЕНИЕ

Проектирование и анализ свойств различных систем требует соответствующего, адекватного рассматриваемой задаче математического аппарата. Если изучаемая система полностью определенная (детерминированная), то решаемая задача и, соответственно, используемый для ее решения математический аппарат обычно достаточно просты. К сожалению, встречающиеся на практике системы обычно характеризуются той или иной степенью неопределенности (недетерминированы). Для исследования и построения таких систем применяют более сложный специализированный математический аппарат – теорию вероятностей, нечеткие множества, интервальную математику [1–3].

Так, в работах [4, 5] автором был предложен новый математический аппарат для проектирования и исследования недетерминированных систем – недетерминистское (интервальное) дифференциальное исчисление. Этот аппарат является аналогом классического диффе-

ренциального исчисления Ньютона–Лейбница [6]. Он позволяет переносить основные идеи классического дифференциального исчисления на неполноту определенные функции, задаваемые с точностью до интервалов возможных значений переменных. Однако, несмотря на сходство основных исходных идей двух исчислений, предложенное исчисление по форме совсем не похоже на классическое дифференциальное исчисление Ньютона–Лейбница, что является следствием неопределенности интервальных функций, фигурирующих в интервальной математике. Кроме того, предложенное интервальное дифференциальное исчисление, по нашему мнению, более адекватно реальным объектам и процессам, чем классическое дифференциальное исчисление [7].

### 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Как известно из классического дифференциального исчисления [6], нахождение производной от любой функции базируется на 1) представлении этой функции в виде соответствующей суперпозиции так называемых элементарных функций; 2) переходе в представлении от функций к производным, с использованием теорем дифференциального исчисления (производная суммы функций, производная произведения функций и т.д.). 3) подстановке вместо производных элементарных функций их выражений, полученных ранее. Для осуществления процедуры составляют таблицы производных элементарных функций.

Сходная описанной процедура может быть полезна и при нахождении производных от интервальных функций, изучаемых в интервальном дифференциальном исчислении. Конечно, при этом необходимо учитывать большое отличие свойств и форм представления обыч-

ных и интервальных функций и производных от них. В соответствии с этим основными задачами в данной статье являются: 1) составление полного набора производных от всех интервальных элементарных функций; 2) выявление различий производных от интервальных элементарных функций и производных от детерминированных элементарных функций.

## 2 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Мы будем использовать в качестве вспомогательных сведений прежде всего основные математические сведения из алгебры интервальных чисел [3, 4]. В этой алгебре в качестве операндов берутся замкнутые вещественные интервалы, определяемые как множества всех вещественных чисел между нижней и верхней границами интервала, включая сами эти границы

$$\tilde{a} = [a_1, a_2] \equiv \{a \mid a_1 \leq a \leq a_2\}.$$

Эти операнды естественно называть интервальными числами. Операции  $\circ$  над интервальными числами  $\tilde{a} = [a_1, a_2], \tilde{b} = [b_1, b_2]$  вводятся как прямые теоретико-множественные обобщения соответствующих операций над вещественными числами  $a, b$ , т.е.

$$\tilde{a} \circ \tilde{b} = \{a \circ b \mid a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\}.$$

Таким образом, основные алгебраические операции над интервальными числами определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \tilde{a} + \tilde{b} &= \{a + b \mid a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\}, \quad \tilde{a} - \tilde{b} = \{a - b \mid a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\}, \\ k \cdot \tilde{a} &= \{k \cdot a \mid a \in \tilde{a}\}, \\ \tilde{a} \cdot \tilde{b} &= \{a \cdot b \mid a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\}, \quad \tilde{a} / \tilde{b} = \{a / b \mid a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\}. \end{aligned}$$

На основе определений операций над интервальными числами можно вывести следующие формулы для вычисления результатов этих операций [3]:

$$\begin{aligned} \tilde{a} + \tilde{b} &\equiv [a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2], \\ \tilde{a} - \tilde{b} &\equiv [a_1, a_2] - [b_1, b_2] = [a_1 - b_2, a_2 - b_1], \\ k \cdot \tilde{a} &\equiv k \cdot [a_1, a_2] = \begin{cases} [ka_1, ka_2], & k > 0, \\ [ka_2, ka_1], & k < 0, \end{cases} \\ \tilde{a} \cdot \tilde{b} &\equiv [a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2] = [\min_{i,j}(a_i \cdot b_j), \max_{i,j}(a_i \cdot b_j)], \\ \tilde{a} / \tilde{b} &\equiv [a_1, a_2] / [b_1, b_2] = [a_1, a_2] \cdot [1/b_2, 1/b_1]. \end{aligned}$$

В качестве вспомогательного нам потребуется еще понятие интервальной функции [4, 5, 7], которая вводится как однозначное отображение множества замкнутых вещественных интервалов  $\{\tilde{x}\}, \tilde{x} = [x_1, x_2]$  на множество замкнутых вещественных интервалов  $\{\tilde{y}\}, \tilde{y} = [y_1, y_2]$  этого же типа. Символически интервальная функция записывается в виде

$$\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x}),$$

где, аналогично числовым функциям,  $\tilde{x}$  называется интервальной независимой переменной (интервальным аргументом),  $\tilde{y}$  – интервальной зависимой переменной,  $\tilde{f}$  – интервальной функцией.

## 3 МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Базовое понятие интервальной функции [4, 5, 7] вводится как однозначное отображение множества  $\{\tilde{x}\}$  замкнутых вещественных интервалов  $\tilde{x} = [x_1, x_2]$  на множество  $\{\tilde{y}\}$  замкнутых вещественных интервалов  $\tilde{y} = [y_1, y_2]$  такого же вида. Символически интервальная функция записывается в виде

$$\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x}) \text{ или } \tilde{y} = [y_1, y_2] = [f_1(\tilde{x}), f_2(\tilde{x})], \quad (1)$$

где  $\tilde{x} = [x_1, x_2]$  – интервальная независимая переменная,  $\tilde{y} = [y_1, y_2]$  – интервальная зависимая переменная,  $\tilde{f} = [f_1, f_2]$  – интервальная функция, с ее нижней  $f_1$  и верхней  $f_2$  граничными функциями. Второе базовое понятие, используемое далее в настоящей статье – понятие предела интервальной функции.

Независимая интервальная переменная  $\tilde{x} = [x_1, x_2]$  интервальной функции (1) по определению неограниченно приближается к некоторому интервалу (пределу)  $\tilde{x}^\circ = [x_1^\circ, x_2^\circ]$ , если в процессе этого изменения  $x_1$  неограниченно приближается к  $x_1^\circ$ , а  $x_2$  к  $x_2^\circ$ . Это записывается:

$$\tilde{x} \rightarrow \tilde{x}^\circ \equiv (x_1 \rightarrow x_1^\circ, x_2 \rightarrow x_2^\circ). \quad (2)$$

Аналогично определяется неограниченное приближение зависимой интервальной переменной  $\tilde{y} = [y_1, y_2]$  интервальной функции (1) к интервалу (пределу)  $\tilde{y}^\circ = [y_1^\circ, y_2^\circ]$ :

$$\tilde{y} \rightarrow \tilde{y}^\circ \equiv (y_1 \rightarrow y_1^\circ, y_2 \rightarrow y_2^\circ). \quad (3)$$

Если независимая интервальная переменная  $\tilde{x}$  своим неограниченным приближением к интервалу-пределу  $\tilde{x}^\circ$  вызывает неограниченное приближение зависимой интервальной переменной  $\tilde{y}$  к интервалу-пределу  $\tilde{y}^\circ$ , говорится, что предел интервальной функции (1) при  $\tilde{x}$ , стремящемся к  $\tilde{x}^\circ$ , равен  $\tilde{y}^\circ$ , или символически

$$\lim_{\tilde{x} \rightarrow \tilde{x}^\circ} \tilde{y} = \tilde{y}^\circ \text{ или } \lim_{\tilde{x} \rightarrow \tilde{x}^\circ} \tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{y}^\circ. \quad (4)$$

В случае если интервальная функция  $\tilde{f}$  (1) непрерывна, т.е. ее нижняя  $f_1$  и верхняя  $f_2$  граничные функции являются непрерывными функциями нижней  $x_1$  и верхней  $x_2$  границ независимой переменной  $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ , то предел функции  $\tilde{f}$  равен ее значению в предельной точке  $\tilde{x}^\circ$  аргумента  $\tilde{x}$ , или символически

$$\lim_{\tilde{x} \rightarrow \tilde{x}^\circ} \tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{f}(\tilde{x}^\circ). \quad (5)$$

Основное для нас понятие интервальной производной вводится аналогично понятию обычной производной функции [6]. Рассмотрим произвольную интервальную функцию  $\tilde{f}$  вида (1). Будем считать ее непрерывной. Зафиксируем значение независимой переменной  $\tilde{x} = \tilde{x}^\circ = [x_1^\circ, x_2^\circ]$ . Этому значению, в силу непрерывности

функции, соответствует некоторое фиксированное значение самой функции  $\tilde{y}^\circ = \tilde{f}(\tilde{x}^\circ)$ . Зададим приращение независимой и зависимой переменных функции относительно этих фиксированных значений

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{x} &= \tilde{x} - \tilde{x}^\circ, \\ \Delta\tilde{y} &= \tilde{y} - \tilde{y}^\circ = \tilde{f}(\tilde{x}) - \tilde{f}(\tilde{x}^\circ)\end{aligned}\quad (6)$$

и составим отношение второго приращения к первому

$$\Delta\tilde{y}/\Delta\tilde{x} = (\tilde{y} - \tilde{y}^\circ)/(\tilde{x} - \tilde{x}^\circ) = (\tilde{f}(\tilde{x}) - \tilde{f}(\tilde{x}^\circ))/(\tilde{x} - \tilde{x}^\circ). \quad (7)$$

Предел отношения (7) при неограниченном приближении независимой переменной  $\tilde{x}$  к ее фиксированному предельному значению  $\tilde{x}^\circ$ , если он существует, называется интервальной производной функцией от исходной интервальной функции  $\tilde{f}(\tilde{x})$  (1) в точке  $\tilde{x}^\circ$  и обозначается как  $\tilde{y}'_{\tilde{x}^\circ}$  или  $\tilde{f}'_{\tilde{x}^\circ}(\tilde{x})$ . Таким образом,

$$\tilde{y}'_{\tilde{x}^\circ} \equiv \tilde{f}'_{\tilde{x}^\circ}(\tilde{x}) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow \tilde{x}^\circ} \Delta\tilde{y}/\Delta\tilde{x}, \text{ где } \Delta\tilde{x}, \Delta\tilde{y} \text{ из (6).} \quad (8)$$

Доказано [4, 5, 7], что для существования у непрерывной интервальной функции  $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x})$  в точке  $\tilde{x}^\circ$  интервальной производной необходимо и достаточно, чтобы в этой точке и некоторой ее окрестности независимая  $\tilde{x}$  и зависимая  $\tilde{y}$  переменные были существенно интервальными, а именно, не вырождались в точку.

Как и в случае обычной производной, понятие интервальной производной можно обобщить путем повторного выполнения операции взятия производной.

При этом из интервальной производной 1-го порядка  $\tilde{y}'_{\tilde{x}}$  получается интервальная производная 2-го порядка  $\tilde{y}''_{\tilde{x}}$ , из последней – производная 3-го порядка  $\tilde{y}'''_{\tilde{x}}$  и т.д. Согласно введенным определениям интервальной производной любого порядка, все интервальные производные, в том числе и исходная интервальная функция, при любом численном значении аргумента  $\tilde{x}$  как интервала возможных значений  $\tilde{x} = [x_1, x_2]$  также принимают численные значения в виде некоторого интервала значений. Поэтому вычисление интервальной функции и интервальной производной от нее любого порядка заключается в вычислении нижних и верхних граничных функций соответствующих интервальных функций. Вычисление функции  $\tilde{f}$  выполняется по правилу (1), задающему эту функцию в виде пары «нижняя  $f_1$  и верхняя  $f_2$  граничные функции». Вычисление производной  $n$ -го порядка  $\tilde{y}_{\tilde{x}}^{(n)} = \tilde{f}_{\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x})$  от интервальной функции  $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x})$  можно выполнять с помощью формулы [7]

$$\tilde{y}_{\tilde{x}}^{(n)} = \tilde{f}_{\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x}) = [\tilde{f}_{1,\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x}), \tilde{f}_{2,\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x})], \quad (9)$$

где  $\tilde{f}_{1,\tilde{x}}^{(n)}$  и  $\tilde{f}_{2,\tilde{x}}^{(n)}$  – соответственно нижняя и верхняя граничные функции интервальной производной  $\tilde{f}_{\tilde{x}}^{(n)}$   $n$ -го

порядка от исходной интервальной функции  $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x})$ . Границные функции в формуле (9) выражаются в таком виде

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{1,\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x}) &= -2^{n-1}(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)^n, \\ \tilde{f}_{2,\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x}) &= 2^{n-1}(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)^n,\end{aligned}\quad (10)$$

где  $x_1, x_2$  – нижняя и верхняя границы интервального аргумента  $\tilde{x} = [x_1, x_2]$  в точке взятия производной от функции  $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x})$ ,  $y_1, y_2$  – нижняя и верхняя границы интервальной зависимой переменной  $\tilde{y} = [y_1, y_2]$  этой функции в той же точке. Как следует из выражений (9), (10), интервальная производная любого порядка имеет вид интервала, который симметричен относительно нуля. Это позволяет записать в более простой форме выражение интервальной производной любого  $n$ -го порядка (9), (10):

$$\tilde{y}_{\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x}) = \tilde{f}_{\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x}) = [-\tilde{f}_{\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x}), \tilde{f}_{\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x})], \quad (11)$$

где

$$\tilde{f}_{\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x}) = 2^{n-1}(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)^n, \quad (12)$$

а значения  $x_1, x_2, y_1, y_2$  раскрыты в пояснениях к формуле (10).

Формулы (11), (12) позволяют находить интервальные производные любого порядка от любых интервальных функций. В том числе, они позволяют найти производные от элементарных интервальных функций.

#### 4 РЕЗУЛЬТАТЫ

Согласно определению любая элементарная интервальная функция  $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x})$  вида (1) получается из соответствующей вещественной элементарной функции  $y = f(x)$  путем разделимизации ее аргумента  $x$ , зависимой переменной  $y$  и собственно функции  $f$ , т.е. преобразования в соответствующие интервальный аргумент  $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ , интервальную зависимую переменную  $\tilde{y} = [y_1, y_2]$  и интервальную функцию  $\tilde{f} = [f_1, f_2]$ . Определение производных от элементарных интервальных функций мы начнем с простейшей функции: интервальной константы.

**Функция интервальная константа** выражается в виде

$$\tilde{y} \equiv \tilde{c} = [c_1, c_2], \quad c_1 = \text{const}, \quad c_2 = \text{const}, \quad c_1 < c_2. \quad (13)$$

Сравнивая формулу (13) с общим выражением (1) любой интервальной функции, видим, что интервальная константа – это интервальная функция, нижняя и верхняя граничные функции которой имеют вид

$$y_1 = f_1(\tilde{x}) = f_1(x_1, x_2) = c_1, \quad y_2 = f_2(\tilde{x}) = f_2(x_1, x_2) = c_2. \quad (14)$$

Подставив (14) в общие формулы интервальных производных (11), (12), мы получим выражение производной любого  $n$ -го порядка от интервальной константы  $\tilde{y} = \tilde{c}$  в виде

$$\tilde{y}^{(n)} \equiv \tilde{c}^{(n)} = [c_1, c_2] = [-c_{\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x}), c_{\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x})], \quad (15)$$

где  $c_{\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x}) = 2^{n-1}(c_2 - c_1)/(x_2 - x_1)^n$ .

Как видно из выражения (15), интервальная производная любого  $n$ -го порядка от функции – интервальной константы  $\tilde{c}$  (13) не равна 0 – нулю (точнее, нулевому интервалу  $\tilde{0}=[0,0]$ ), в отличие от классической производной от вещественной константы, равной 0. Более того, эта производная не является постоянной величиной, а существенно зависит от аргумента  $\tilde{x}=[x_1, x_2]$ . Согласно формуле (15), она существует во всех точках  $\tilde{x}$ , где  $x_1 \neq x_2$ , и монотонно убывает при увеличении разности  $x_2 - x_1$ .

**Интервальная степенная функция** выражается в виде

$$\tilde{y}=[y_1, y_2]=\tilde{x}^m \equiv [x_1, x_2]^m, \quad (16)$$

где  $\tilde{x}=[x_1, x_2]$  – интервальная независимая переменная,  $\tilde{y}=[y_1, y_2]$  – интервальная зависимая переменная. Будем считать, исходя из физических соображений, что в пределах одной (любой!) решаемой задачи переменная величина  $\tilde{x}=[x_1, x_2]$  может быть только положительной (более общо – неотрицательной) или только отрицательной (более общо – неположительной), т.е. выполняется условие

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ или } x_1, x_2 \leq 0. \quad (17)$$

Тогда интервальную степенную функцию (16) можно записать в явном интервальном виде посредством следующей формулы:

$$\tilde{y}=[y_1, y_2]=\begin{cases} [x_1^m, x_2^m], & \text{при } x_1, x_2 \geq 0 \text{ или } x_1, x_2 \leq 0, m \text{ нечетно}; \\ [x_2^m, x_1^m], & \text{при } x_1, x_2 \leq 0, m \text{ четно}. \end{cases} \quad (18)$$

Сравнив выражение (18) с общим выражением любой интервальной функции (1) мы видим, что интервальная степенная функция есть интервальная функция, нижняя и верхняя граничные функции которой имеют такой вид:

$$y_1=f_1(\tilde{x})=f_1(x_1, x_2)=\begin{cases} x_1^m, & \text{при } x_1, x_2 \geq 0 \text{ или } x_1, x_2 \leq 0, m \text{ нечетно}; \\ x_2^m, & \text{при } x_1, x_2 \leq 0, m \text{ четно}; \end{cases}$$

$$y_2=f_2(\tilde{x})=f_2(x_1, x_2)=\begin{cases} x_2^m, & \text{при } x_1, x_2 \geq 0 \text{ или } x_1, x_2 \leq 0, m \text{ нечетно}; \\ x_1^m, & \text{при } x_1, x_2 \leq 0, m \text{ четно}. \end{cases} \quad (19)$$

Подставим (19) в общие формулы интервальных производных (11), (12). В результате получим выражение производной  $n$ -го порядка от интервальной степенной функции  $\tilde{y}=\tilde{x}^m$  (16)

$$\tilde{y}^{(n)}=(\tilde{x}^m)^{(n)}=([x_1, x_2]^m)^{(n)}=[-f^{(n)}(\tilde{x}), f^{(n)}(\tilde{x})], \quad (20)$$

где

$$f^{(n)}(\tilde{x})=\begin{cases} 2^{n-1}(x_2^m - x_1^m)/(x_2 - x_1)^n, & \text{при } x_1, x_2 \geq 0 \text{ или } x_1, x_2 \leq 0, m \text{ нечетно}; \\ 2^{n-1}(x_1^m - x_2^m)/(x_2 - x_1)^n, & \text{при } x_1, x_2 \leq 0, m \text{ четно}. \end{cases}$$

Как видно из формулы (20), в интервальной производной любого  $n$ -го порядка  $(\tilde{x}^m)^{(n)}$  от интервальной степенной функции  $\tilde{x}^m$  (16) при увеличении  $n$  показатель степени  $m$  не уменьшается, приближаясь к нулю, в отличие от классической производной от вещественной степенной функции, у которой этот эффект существует. Интервальная производная  $(\tilde{x}^m)^{(n)}$ , как показано в (20), существует во всех точках  $\tilde{x}=[x_1, x_2]$ , в которых  $x_1 \neq x_2$ ; она монотонно убывает с увеличением разности  $x_2 - x_1$ .

**Интервальная показательная функция** выражается в виде

$$\tilde{y}=[y_1, y_2]=a^{\tilde{x}} \equiv a^{[x_1, x_2]}, \quad a>0, \quad (21)$$

где  $\tilde{x}=[x_1, x_2]$  – интервальная независимая переменная,  $\tilde{y}=[y_1, y_2]$  – интервальная зависимая переменная. Согласно общему определению интервальной функции [4, 5, 7], интервальная функция  $a^{\tilde{x}}$  определяется в следующем виде

$$a^{\tilde{x}}=\{a^x \mid x \in \tilde{x}\}, \quad (22)$$

в котором  $a^x$  – обычная показательная функция, которая монотонно возрастает. Это позволяет задать интервальную показательную функцию (21) в явном интервальном виде формулой

$$\tilde{y}=[y_1, y_2]=[a^{x_1}, a^{x_2}], \quad a>0. \quad (23)$$

Сравнив выражение (23) с общим выражением любой интервальной функции (1), устанавливаем, что интервальная показательная функция есть интервальная функция, нижняя и верхняя граничные функции которой принимают следующий вид:

$$y_1=f_1(\tilde{x})=f_1(x_1, x_2)=a^{x_1}, \quad y_2=f_2(\tilde{x})=f_2(x_1, x_2)=a^{x_2}, \quad a>0. \quad (24)$$

Подставив выражения (24) в общие формулы интервальных производных (11), (12), имеем выражение производной  $n$ -го порядка от интервальной показательной функции  $\tilde{y}=a^{\tilde{x}}$  (21):

$$\tilde{y}^{(n)}=(a^{\tilde{x}})^{(n)}=(a^{[x_1, x_2]})^{(n)}=[-f^{(n)}(\tilde{x}), f^{(n)}(\tilde{x})], \quad (25)$$

$$\text{где } f^{(n)}(\tilde{x})=2^{n-1}(a^{x_2} - a^{x_1})/(x_2 - x_1)^n.$$

Формула (25) показывает, что в интервальной производной любого  $n$ -го порядка  $(a^{\tilde{x}})^{(n)}$  от интервальной показательной функции  $a^{\tilde{x}}$  при увеличении  $n$  перед данной функцией не появляются дополнительные множители  $\ln a$ , в отличие от классической производной от вещественной показательной функции, у которой такие множители появляются. Согласно формуле (25), интервальная производная  $(a^{\tilde{x}})^{(n)}$ , существует во всех точках  $\tilde{x}=[x_1, x_2]$ , в которых  $x_1 \neq x_2$ ; она монотонно убывает с увеличением разности  $x_2 - x_1$ .

**Интервальная экспоненциальная функция** выражается в виде

$$\tilde{y}=[y_1, y_2]=e^{\tilde{x}} \equiv e^{[x_1, x_2]}, \quad (26)$$

где  $\tilde{x}=[x_1, x_2]$  – интервальная независимая переменная,  $\tilde{y}=[y_1, y_2]$  – интервальная зависимая переменная. Из сравнения (21) и (26) выясняется, что интервальная экспоненциальная функция (26) – частный случай интервальной показательной функции (21) при  $a=e$ . Таким образом, из выражения (25) производной любого  $n$ -го по-

рядка от интервальной показательной функции, положив в нем  $a=e$ , получим следующее выражение производной любого  $n$ -го порядка от интервальной экспоненциальной функции

$$\tilde{y}^{(n)} = (e^{\tilde{x}})^{(n)} = (e^{[x_1, x_2]})^{(n)} = [-f^{(n)}(\tilde{x}), f^{(n)}(\tilde{x})], \quad (27)$$

где

$$f^{(n)}(\tilde{x}) = 2^{n-1}(e^{x_2} - e^{x_1})/(x_2 - x_1)^n.$$

Формула (27) показывает, что в интервальной производной  $(e^{\tilde{x}})^{(n)}$  любого  $n$ -го порядка от интервальной экспоненты  $e^{\tilde{x}}$  (26) при увеличении  $n$  перед экспонентой изменяется множитель

$$M = 2^{n-1}/(x_2 - x_1)^n, \quad (28)$$

в отличие от классической производной от вещественной экспоненты, у которой этого множителя нет. Интервальная производная  $(e^{\tilde{x}})^{(n)}$ , согласно (27), существует во всех точках  $\tilde{x}=[x_1, x_2]$ , в которых  $x_1 \neq x_2$  и монотонно убывает с увеличением разности  $x_2 - x_1$ .

**Интервальная логарифмическая функция** выражается в виде

$$\tilde{y} = [y_1, y_2] = \log_a \tilde{x} = \log_a [x_1, x_2] \quad a > 0, \quad (29)$$

где  $\tilde{x} = [x_1, x_2]$  – интервальная независимая переменная,  $\tilde{y} = [y_1, y_2]$  – интервальная зависимая переменная. Согласно определению интервальной функции [4, 5, 7], интервальная функция  $\log_a \tilde{x}$  определяется в виде

$$\log_a \tilde{x} = \{\log_a x \mid x \in \tilde{x}\}, \quad a > 0, a \neq 1, \quad (30)$$

при этом  $\log_a x$  – исходная обычная логарифмическая функция, которая монотонно возрастает. Это позволяет записать интервальную логарифмическую функцию (29) в явном интервальном виде с помощью такой формулы

$$\tilde{y} = [y_1, y_2] = [\log_a x_1, \log_a x_2], \quad a > 0, a \neq 1. \quad (31)$$

Сравнив выражение (31) с общим выражением любой интервальной функции (1), заключаем, что интервальная логарифмическая функция – интервальная функция, нижняя и верхняя граничные функции которой выглядят как

$$y_1 = f_1(\tilde{x}) = f_1(x_1, x_2) = \log_a x_1,$$

$$y_2 = f_2(\tilde{x}) = f_2(x_1, x_2) = \log_a x_2, \quad a > 0, a \neq 1. \quad (32)$$

При подстановке (32) в общие формулы интервальных производных (11), (12), выражение для производной любого  $n$ -го порядка от интервальной логарифмической функции  $\tilde{y} = \log_a \tilde{x}$  (29) запишется в виде

$$\tilde{y}^{(n)} = (\log_a \tilde{x})^{(n)} = (\log_a [x_1, x_2])^{(n)} = [-f^{(n)}(\tilde{x}), f^{(n)}(\tilde{x})], \quad (33)$$

здесь  $f^{(n)}(\tilde{x}) = 2^{n-1}(\log_a x_2 - \log_a x_1)/(x_2 - x_1)^n, \quad a > 0, a \neq 1$ , или, после потенцирования,

$$f^{(n)}(\tilde{x}) = 2^{n-1} \log_a (x_2/x_1)/(x_2 - x_1)^n, \quad a > 0, a \neq 1.$$

Как это видно из (33), в интервальной производной  $(\log_a \tilde{x})^{(n)}$  любого  $n$ -го порядка от интервальной функции логарифм  $\log_a \tilde{x}$  исходная логарифмическая функция остается логарифмической, в отличие от классической производной от вещественной логарифмической функции  $\log_a x$ , которая равна  $1/x \ln a$ , т.е. является рациональной функцией. Производная  $(\log_a \tilde{x})^{(n)}$  существует во всех точках  $\tilde{x}=[x_1, x_2]$ , где  $x_1 \neq x_2$ , и монотонно убывает с увеличением  $x_2 - x_1$ .

**Интервальная натуральная логарифмическая функция** выражается в виде

$$\tilde{y} = [y_1, y_2] = \ln \tilde{x} = \ln [x_1, x_2], \quad (34)$$

где  $\tilde{x} = [x_1, x_2]$  – интервальная независимая переменная,  $\tilde{y} = [y_1, y_2]$  – интервальная зависимая переменная. Из сравнения (29) и (34) мы видим, что интервальная натуральная логарифмическая функция (34) – частный случай интервальной логарифмической функции (29) при  $a=e$ . Так что, из формулы (33) производной любого  $n$ -го порядка от интервальной логарифмической функции, положив в нем  $a=e$ , найдем выражение производной любого  $n$ -го порядка от интервальной натурально-логарифмической функции

$$\tilde{y}^{(n)} = (\ln \tilde{x})^{(n)} = (\ln [x_1, x_2])^{(n)} = [-f^{(n)}(\tilde{x}), f^{(n)}(\tilde{x})], \quad (35)$$

где

$$f^{(n)}(\tilde{x}) = 2^{n-1} \ln (x_2/x_1)/(x_2 - x_1)^n.$$

При этом из (35) видно, что в интервальной производной любого  $n$ -го порядка  $(\ln \tilde{x})^{(n)}$  от натурально-логарифмической интервальной функции  $\ln \tilde{x}$  исходная натурально-логарифмическая функция остается натурально-логарифмической, в отличие от классической производной от натурально-логарифмической функции  $\ln x$ , которая равна  $1/x$  и является рациональной функцией. Интервальная производная  $(\ln \tilde{x})^{(n)}$  существует во всех точках  $\tilde{x}=[x_1, x_2]$ , в которых  $x_1 \neq x_2$ , она монотонно убывает с увеличением разности  $x_2 - x_1$ .

**Интервальная тригонометрическая функция «синус»** выражается в следующем виде

$$\tilde{y} = [y_1, y_2] = \sin \tilde{x} = \sin [x_1, x_2], \quad (36)$$

где  $\tilde{x} = [x_1, x_2]$  – интервальная независимая переменная,  $\tilde{y} = [y_1, y_2]$  – интервальная зависимая переменная. По определению интервальной функции [4, 5, 7], функция  $\sin \tilde{x}$  задается в виде

$$\sin \tilde{x} = \{\sin x \mid x \in \tilde{x}\}, \quad (37)$$

где  $\sin x$  – исходная обычная тригонометрическая функция «синус», которая монотонно возрастает на интервале  $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ , в котором она последовательно принимает все возможные значения от  $-1$  до  $1$ . Последнее позволяет нам записать интервальную тригонометрическую

кую функцію синус (37) в явном інтервальному виді з помічою формули

$$\tilde{y} = [y_1, y_2] = \sin \tilde{x} = \sin[x_1, x_2] = [\sin x_1, \sin x_2]. \quad (38)$$

Сравнив вираження (38) з общим вираженням будь-якої інтервальної функції (1), видим, що інтервальна тригонометрическа функція «синус» є інтервальну функція, нижня і верхня граничні функції якої мають вид

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(\tilde{x}) = f_1(x_1, x_2) = \sin x_1, \\ y_2 &= f_2(\tilde{x}) = f_2(x_1, x_2) = \sin x_2. \end{aligned} \quad (39)$$

Подставив вираження (39) в общие формулы інтервальної производных (11), (12), получим следующее выражение производной любого  $n$ -го порядка от інтервальної тригонометрическа функції  $\sin \tilde{x}$

$$\tilde{y}^{(n)} = (\sin \tilde{x})^{(n)} = (\sin[x_1, x_2])^{(n)} = [-f^{(n)}(\tilde{x}), f^{(n)}(\tilde{x})], \quad (40)$$

где

$$f^{(n)}(\tilde{x}) = 2^{n-1}(\sin x_2 - \sin x_1)/(x_2 - x_1)^n.$$

Формула (40) показывает, что в інтервальної производной любого  $n$ -го порядка  $(\sin \tilde{x})^{(n)}$  от інтервальної тригонометрическа функції  $\sin \tilde{x}$  исходная тригонометрическа функція синус остается синусом, в отличие от классической производной от обычной тригонометрическа функції  $\sin x$ , которая равна  $\cos x$ . Інтервальної производной  $(\sin \tilde{x})^{(n)}$  существует во всех точках  $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ , где  $x_1 \neq x_2$ , она монотонно убывает с увеличением разности  $x_2 - x_1$ .

**Інтервальна тригонометрическа функція «косинус»** выражается в следующем виде

$$\tilde{y} = [y_1, y_2] = \cos \tilde{x} = \cos[x_1, x_2], \quad (41)$$

где  $\tilde{x} = [x_1, x_2]$  – інтервальна независима переменная,  $\tilde{y} = [y_1, y_2]$  – інтервальна зависима переменная. Согласно общему определению інтервальної функції [4, 5, 7], інтервальна функція  $\cos \tilde{x}$  определяється в следующем виде:

$$\cos \tilde{x} = \{\cos x \mid x \in \tilde{x}\}, \quad (42)$$

где  $\cos x$  – исходная обычна тригонометрическа функція «косинус», которая монотонно убывает в інтервале  $0 \leq x \leq \pi$ , принимая последовательно все возможные значения от 1 до -1. Это позволяет нам задать інтервальну тригонометрическа функцію «косинус» в явном інтервальному виде посредством формули

$$\tilde{y} = [y_1, y_2] = \cos \tilde{x} = \cos[x_1, x_2] = [\cos x_2, \cos x_1]. \quad (43)$$

Сравнив формулу (43) з общим вираженім інтервальної функції (1). Видим, що інтервальна тригонометрическа функція «косинус» являється інтервальну функцієй, нижня і верхня граничні функції якої мають вид

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(\tilde{x}) = f_1(x_1, x_2) = \cos x_2, \\ y_2 &= f_2(\tilde{x}) = f_2(x_1, x_2) = \cos x_1. \end{aligned} \quad (44)$$

Подставив вираженія (44) в общие формулы інтервальної производных (11), (12), получим следующее выражение производной любого  $n$ -го порядка от інтервальної тригонометрическа функції  $\cos \tilde{x}$

$$\tilde{y}^{(n)} = (\cos \tilde{x})^{(n)} = (\cos[x_1, x_2])^{(n)} = [-f^{(n)}(\tilde{x}), f^{(n)}(\tilde{x})], \quad (45)$$

где

$$f^{(n)}(\tilde{x}) = 2^{n-1}(\cos x_2 - \cos x_1)/(x_2 - x_1)^n.$$

Формула (45) показывает, что в інтервальної производной любого  $n$ -го порядка  $(\cos \tilde{x})^{(n)}$  от інтервальної тригонометрическа функції  $\cos \tilde{x}$  исходная тригонометрическа функція косинус остается косинусом, в отличие от классической производной от вещественной тригонометрическа функції  $\cos x$ , которая равна  $-\sin x$ . Інтервальної производной  $(\cos \tilde{x})^{(n)}$  существует во всех точках  $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ ,  $x_1 \neq x_2$ , и монотонно убывает с увеличением разности  $x_2 - x_1$ .

**Інтервальна тригонометрическа функція «тангенс»** выражается в виде

$$\tilde{y} = [y_1, y_2] = \operatorname{tg} \tilde{x} = \operatorname{tg}[x_1, x_2], \quad (46)$$

где  $\tilde{x} = [x_1, x_2]$  – інтервальна независима переменная,  $\tilde{y} = [y_1, y_2]$  – інтервальна зависима переменная. Согласно общему определению інтервальної функції [4, 5, 7], інтервальна функція  $\operatorname{tg} \tilde{x}$  определяється следующим образом

$$\operatorname{tg} \tilde{x} = \{\operatorname{tg} x \mid x \in \tilde{x}\}, \quad (47)$$

причем  $\operatorname{tg} x$  – обычна тригонометрическа функція «тангенс», которая монотонно возрастает в інтервале  $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ , где она последовательно принимает все возможные значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Это позволяет записать інтервальную тригонометрическа функцію «тангенс» (47) в явном інтервальному виде с помічою формули

$$\tilde{y} = [y_1, y_2] = \operatorname{tg} \tilde{x} = \operatorname{tg}[x_1, x_2] = [\operatorname{tg} x_1, \operatorname{tg} x_2]. \quad (48)$$

Сравнив вираженія (48) з общим вираженім інтервальної функції (1), заключаем, что інтервальна тригонометрическа функція «тангенс» является інтервальну функцією, нижня і верхня граничні функції якої мають вид

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(\tilde{x}) = f_1(x_1, x_2) = \operatorname{tg} x_1, \\ y_2 &= f_2(\tilde{x}) = f_2(x_1, x_2) = \operatorname{tg} x_2. \end{aligned} \quad (49)$$

Подставив вираженія (49) в общие формулы для інтервальної производных (11), (12), получим следующее выражение производной любого  $n$ -го порядка от інтервальної тригонометрическа функції  $\operatorname{tg} \tilde{x}$

$$\tilde{y}^{(n)} = (\operatorname{tg} \tilde{x})^{(n)} = (\operatorname{tg}[x_1, x_2])^{(n)} = [-f^{(n)}(\tilde{x}), f^{(n)}(\tilde{x})], \quad (50)$$

где

$$f^{(n)}(\tilde{x}) = 2^{n-1}(\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1)/(x_2 - x_1)^n.$$

Формула (50) показывает, что в интервальной производной любого  $n$ -го порядка  $(\operatorname{tg} \tilde{x})^{(n)}$  от интервальной тригонометрической функции  $\operatorname{tg} \tilde{x}$  исходная функция «тангенс» остается тангенсом, в отличие от классической производной от обычной тригонометрической функции  $\operatorname{tg} x$ , равной  $1/\cos^2 x$ . Интервальная производная  $(\operatorname{tg} \tilde{x})^{(n)}$  существует во всех точках  $\tilde{x}=[x_1, x_2]$ , в которых  $x_1 \neq x_2$  и монотонно убывает с увеличением разности  $x_2 - x_1$ .

**Интервальная тригонометрическая функция «котангенс»** выражается в виде

$$\tilde{y} = [y_1, y_2] = \operatorname{ctg} \tilde{x} = \operatorname{ctg} [x_1, x_2], \quad (51)$$

в котором  $\tilde{x} = [x_1, x_2]$  – интервальная независимая переменная,  $\tilde{y} = [y_1, y_2]$  – интервальная зависимая переменная. Согласно общему определению интервальной функции [4, 5, 7], интервальная функция  $\operatorname{ctg} \tilde{x}$  определяется в виде

$$\operatorname{ctg} \tilde{x} = \{\operatorname{ctg} x \mid x \in \tilde{x}\}, \quad (52)$$

здесь  $\operatorname{ctg} x$  – исходная обычная тригонометрическая функция «котангенс», которая монотонно убывает на интервале  $0 \leq x \leq \pi$ , где последовательно принимает возможные значения от  $+\infty$  до  $-\infty$ . Это позволяет нам записать интервальную тригонометрическую функцию «котангенс» явно в интервальном виде с помощью формулы

$$\tilde{y} = [y_1, y_2] = \operatorname{ctg} \tilde{x} = \operatorname{ctg} [x_1, x_2] = [\operatorname{ctg} x_2, \operatorname{ctg} x_1]. \quad (53)$$

Сравнивая выражение (53) с общим выражением производной интервальной функции (1), видим, что интервальная тригонометрическая функция «котангенс» есть интервальная функция, нижняя и верхняя граничные функции которой имеют вид

$$y_1 = f_1(\tilde{x}) = f_1(x_1, x_2) = \operatorname{ctg} x_2,$$

$$y_2 = f_2(\tilde{x}) = f_2(x_1, x_2) = \operatorname{ctg} x_1. \quad (54)$$

Подставив выражения (54) в общие формулы интервальных производных (11), (12), получаем следующее выражение производной любого  $n$ -го порядка от интервальной тригонометрической функции  $\operatorname{ctg} \tilde{x}$

$$\tilde{y}^{(n)} = (\operatorname{ctg} \tilde{x})^{(n)} = (\operatorname{ctg} [x_1, x_2])^{(n)} = [-f^{(n)}(\tilde{x}), f^{(n)}(\tilde{x})], \quad (55)$$

где

$$f^{(n)}(\tilde{x}) = 2^{n-1} (\operatorname{ctg} x_1 - \operatorname{ctg} x_2) / (x_2 - x_1)^n.$$

Формула (55) показывает, что в интервальной производной любого  $n$ -го порядка  $(\operatorname{ctg} \tilde{x})^{(n)}$  от интервальной тригонометрической функции  $\operatorname{ctg} \tilde{x}$  исходная тригонометрическая функция котангенс остается котангенсом, в отличие от классической производной от обычной тригонометрической функции  $\operatorname{ctg} x$ , которая равна  $-1/\sin^2 x$ . Интервальная производная  $(\operatorname{ctg} \tilde{x})^{(n)}$  существует во всех точках  $\tilde{x}=[x_1, x_2]$ , где  $x_1 \neq x_2$  и монотонно убывает с увеличением  $x_2 - x_1$ .

**Интервальная обратная тригонометрическая функция «арксинус»** выражается в виде

$$\tilde{y} = [y_1, y_2] = \arcsin \tilde{x} = \arcsin [x_1, x_2], \quad (56)$$

где  $\tilde{x} = [x_1, x_2]$  – интервальная независимая переменная,  $\tilde{y} = [y_1, y_2]$  – интервальная зависимая переменная. Согласно общему определению интервальной функции [4, 5, 7], интервальная функция  $\arcsin \tilde{x}$  определяется в виде

$$\arcsin \tilde{x} = \{\arcsin x \mid x \in \tilde{x}\}, \quad (57)$$

в котором  $\arcsin x$  есть исходная обычная обратная тригонометрическая функция «арксинус». Последняя монотонно возрастает на интервале  $-1 \leq x \leq 1$ , проходя последовательно все возможные значения от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$ . Это позволяет записать интервальную обратную тригонометрическую функцию «арксинус» (57) в явном интервальном виде

$$\tilde{y} = [y_1, y_2] = \arcsin \tilde{x} = \arcsin [x_1, x_2] = [\arcsin x_1, \arcsin x_2]. \quad (58)$$

При сравнении выражения (58) с общим выражением интервальной функции (1), устанавливаем, что интервальная обратная тригонометрическая функция «арксинус» является интервальной функцией, нижняя и верхняя граничные функции которой имеют вид

$$y_1 = f_1(\tilde{x}) = f_1(x_1, x_2) = \arcsin x_1,$$

$$y_2 = f_2(\tilde{x}) = f_2(x_1, x_2) = \arcsin x_2. \quad (59)$$

Если подставить (59) в общие формулы интервальных производных (11), (12), мы получаем следующее выражение производной любого  $n$ -го порядка от нашей интервальной обратной тригонометрической функции  $\tilde{y} = \arcsin \tilde{x}$

$$\tilde{y}^{(n)} = (\arcsin \tilde{x})^{(n)} = (\arcsin [x_1, x_2])^{(n)} = [-f^{(n)}(\tilde{x}), f^{(n)}(\tilde{x})], \quad (60)$$

где

$$f^{(n)}(\tilde{x}) = 2^{n-1} (\arcsin x_2 - \arcsin x_1) / (x_2 - x_1)^n.$$

Как видно из формулы (60), в интервальной производной любого  $n$ -го порядка  $(\arcsin \tilde{x})^{(n)}$  от интервальной обратной тригонометрической функции  $\arcsin \tilde{x}$  исходная обычная обратная тригонометрическая функция арксинус так и остается арксинусом, в отличие от классической производной от обычной обратной тригонометрической функции  $\arcsin x$ , которая равна  $1/\sqrt{1-x^2}$ . Интервальная производная  $(\arcsin \tilde{x})^{(n)}$  существует во всех точках  $\tilde{x}=[x_1, x_2]$ ,  $x_1 \neq x_2$ , монотонно убывая с увеличением разности  $x_2 - x_1$ .

**Интервальная обратная тригонометрическая функция «арккосинус»** определяется следующим выражением:

$$\tilde{y} = [y_1, y_2] = \arccos \tilde{x} = \arccos [x_1, x_2], \quad (61)$$

где  $\tilde{x} = [x_1, x_2]$  – интервальная независимая переменная,  $\tilde{y} = [y_1, y_2]$  – интервальная зависимая переменная. Согласно общему определению интервальной функции [4, 5, 7], интервальная функция  $\arccos \tilde{x}$  определяется в виде

7], интервальная функция  $\arccos \tilde{x}$  определяется в следующем виде:

$$\arccos \tilde{x} = \{\arccos x \mid x \in \tilde{x}\}, \quad (62)$$

при этом  $\arccos x$  – исходная обычная обратная тригонометрическая функция «арккосинус», которая монотонно убывает на  $-1 \leq x \leq 1$ , проходя последовательно все свои возможные значения от  $\pi$  до 0. Это позволяет записать функцию «арккосинус» (62) в явном интервальном виде

$$\tilde{y} = [y_1, y_2] = \arccos \tilde{x} = \arccos [x_1, x_2] = [\arccos x_2, \arccos x_1]. \quad (63)$$

Сравнив выражение (63) с общим выражением любой интервальной функции (1), устанавливаем, что интервальная обратная тригонометрическая функция «арккосинус» является интервальной функцией, у которой нижняя и верхняя граничные функции таковы:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(\tilde{x}) = f_1(x_1, x_2) = \arccos x_2, \\ y_2 &= f_2(\tilde{x}) = f_2(x_1, x_2) = \arccos x_1. \end{aligned} \quad (64)$$

Подставив выражения (64) в общие формулы интервальных производных (11), (12), получим выражение производной любого  $n$ -го порядка от интервальной функции  $\tilde{y} = \arccos \tilde{x}$ :

$$\tilde{y}^{(n)} = (\arccos \tilde{x})^{(n)} = (\arccos [x_1, x_2])^{(n)} = [-f^{(n)}(\tilde{x}), f^{(n)}(\tilde{x})], \quad (65)$$

где

$$f^{(n)}(\tilde{x}) = 2^{n-1}(\arccos x_1 - \arccos x_2)/(x_2 - x_1)^n.$$

Формула (65) отражает факт, что в интервальной производной  $n$ -го порядка  $(\arccos \tilde{x})^{(n)}$  от интервальной обратной тригонометрической функции  $\arccos \tilde{x}$  исходная обычная обратная тригонометрическая функция арккосинус остается арккосинусом, в отличие от классической производной от обычной обратной тригонометрической функции  $\arccos x$ , равной  $-1/\sqrt{1-x^2}$ . Интервальная производная  $(\arccos \tilde{x})^{(n)}$  существует во всех точках  $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ , в которых  $x_1 \neq x_2$ , и монотонно убывает с увеличением разности  $x_2 - x_1$ .

**Интервальная обратная тригонометрическая функция «арктангенс»** выражается в виде

$$\tilde{y} = [y_1, y_2] = \arctg \tilde{x} = \arctg [x_1, x_2], \quad (66)$$

где  $\tilde{x} = [x_1, x_2]$  – интервальная независимая переменная,  $\tilde{y} = [y_1, y_2]$  – интервальная зависимая переменная. Согласно общему определению интервальной функции [4, 5, 7], интервальная функция  $\arctg \tilde{x}$  определяется как

$$\arctg \tilde{x} = \{\arctg x \mid x \in \tilde{x}\}, \quad (67)$$

при этом  $\arctg x$  – исходная обычная обратная тригонометрическая функция «арктангенс», которая монотонно возрастает на интервале  $-\infty < x < \infty$ , проходя последовательно все свои возможные значения от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$ , что дает возможность записать интервальную обратную

тригонометрическую функцию «арктангенс» (67) в явном виде

$$\tilde{y} = [y_1, y_2] = \arctg \tilde{x} = \arctg [x_1, x_2] = [\arctg x_1, \arctg x_2]. \quad (68)$$

Сравним формулу (68) с общим выражением любой интервальной функции (1). Хорошо видим, что интервальная обратная тригонометрическая функция «арктангенс» является интервальной функцией, нижняя и верхняя граничные функции которой имеют вид

$$y_1 = f_1(\tilde{x}) = f_1(x_1, x_2) = \arctg x_1,$$

$$y_2 = f_2(\tilde{x}) = f_2(x_1, x_2) = \arctg x_2. \quad (69)$$

Подставив формулы (69) в общие формулы для интервальных производных (11), (12), составим выражение интервальной производной любого  $n$ -го порядка от интервальной обратной тригонометрической функции  $\tilde{y} = \arctg \tilde{x}$  в виде

$$\tilde{y}^{(n)} = (\arctg \tilde{x})^{(n)} = (\arctg [x_1, x_2])^{(n)} = [-f^{(n)}(\tilde{x}), f^{(n)}(\tilde{x})], \quad (70)$$

где

$$f^{(n)}(\tilde{x}) = 2^{n-1}(\arctg x_2 - \arctg x_1)/(x_2 - x_1)^n.$$

Запись (70) дает понять, что в выражении интервальной производной  $(\arctg \tilde{x})^{(n)}$  от интервальной обратной тригонометрической функции  $\arctg \tilde{x}$  исходная обычная обратная тригонометрическая функция арктангенс остается арктангенсом, в отличие от классической производной от обычной обратной тригонометрической функции  $\arctg x$ , которая равна  $1/(1+x^2)$ . Интервальная производная  $(\arctg \tilde{x})^{(n)}$  существует во всех точках  $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ , в которых  $x_1 \neq x_2$ . Она монотонно убывает с увеличением разности  $x_2 - x_1$ .

**Интервальная обратная тригонометрическая функция «арккотангенс»** определяется следующим интервальным выражением

$$\tilde{y} = [y_1, y_2] = \arcctg \tilde{x} = \arcctg [x_1, x_2], \quad (71)$$

где  $\tilde{x} = [x_1, x_2]$  – интервальная независимая переменная,  $\tilde{y} = [y_1, y_2]$  – интервальная зависимая переменная. По общему определению интервальной функции [4, 5, 7], интервальная тригонометрическая функция  $\arcctg \tilde{x}$  определяется как

$$\arcctg \tilde{x} = \{\arcctg x \mid x \in \tilde{x}\}, \quad (72)$$

при этом  $\arcctg x$  – исходная обычная обратная тригонометрическая функция «арккотангенс», которая монотонно убывает на интервале  $-\infty < x < \infty$  и проходит последовательно все возможные значения от  $\pi/2$  до  $-\pi/2$ . Это позволяет записать интервальную обратную тригонометрическую функцию «арккотангенс» (72) в явном виде

$$\tilde{y} = [y_1, y_2] = \arcctg \tilde{x} = \arcctg [x_1, x_2] = [\arcctg x_2, \arcctg x_1]. \quad (73)$$

Если сравнивать (73) с общим выражением интервальной функции (1), можно видеть, что интервальная обратная тригонометрическая функция «арккотангенс»

есть интервальная функция, нижняя и верхняя граничные функции которой имеют вид

$$\begin{aligned}y_1 &= f_1(\tilde{x}) = f_1(x_1, x_2) = \operatorname{arcctg} x_2, \\y_2 &= f_2(\tilde{x}) = f_2(x_1, x_2) = \operatorname{arcctg} x_1.\end{aligned}\quad (74)$$

Подставив формулы (74) в общие формулы для интервальных производных (11), (12), получим выражение производной любого  $n$ -го порядка от интервальной функции  $\tilde{y} = \operatorname{arcctg} \tilde{x}$ :

$$\tilde{y}^{(n)} = (\operatorname{arcctg} \tilde{x})^{(n)} = (\operatorname{arcctg} [x_1, x_2])^{(n)} = [-f^{(n)}(\tilde{x}), f^{(n)}(\tilde{x})], \quad (75)$$

где

$$f^{(n)}(\tilde{x}) = 2^{n-1} (\operatorname{arcctg} x_1 - \operatorname{arcctg} x_2) / (x_2 - x_1)^n.$$

Формула (75) показывает, что в интервальной производной  $n$ -го порядка  $(\operatorname{arcctg} \tilde{x})^{(n)}$  от интервальной обратной тригонометрической функции  $\operatorname{arcctg} \tilde{x}$  исходная обычная обратная тригонометрическая функция арккотангенс остается арккотангенсом, в отличие от классической производной от вещественной обратной тригонометрической функции  $\operatorname{arcctg} x$ , которая равна  $-1/(1+x^2)$ . Интервальная производная  $(\operatorname{arcctg} \tilde{x})^{(n)}$  существует во всех точках  $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ , в которых  $x_1 \neq x_2$  и монотонно убывает с увеличением разности  $x_2 - x_1$ .

## 5 ОБСУЖДЕНИЕ

Проблема вычисления производных от интервально-определенных функций существенно отличается от аналогичной проблемы для полностью определенных функций. Это отличие связано с известным отличием процесса вычисления полностью определенной функции от процесса вычисления интервальной функции – во втором случае приходится вычислять параллельно две независимые точно заданные функции – нижнюю и верхнюю граничные функции интервальной функции. В связи с этим отличием для вычисления полностью определенных функций имеются простые и ясные методики, основанные на методах вычислительной математики, в то время как вычисление неполностью определенной – интервальной функции оказывается более сложным [8–14]. Эта сложность вычисления распространяется и на производные от интервальных функций, поскольку они также являются интервальными функциями. Поэтому предпринятое в статье детальное изучение производных элементарных функций, сопровождаемое получением простых формул для вычисления этих производных, является важным шагом на пути уменьшения сложности вычисления интервальных функций. В процессе изучения выявлены различия между интервальными производными от интервальных элементарных функций и классическими производными от детерминированных элементарных функций. Главное различие состоит в том, что производная любого  $n$ -го ( $n=1,2,\dots$ ) порядка от любой интервальной функции  $\tilde{P}(\tilde{x})$ , в частности, элементарной функции, всегда представляет собой функцию класса  $\tilde{P}(\tilde{x})/\tilde{x}^n$ . Поэтому ин-

тервальную производную любого  $n$ -го порядка с полным правом можно интерпретировать как скорость  $n$ -го порядка изменения функции  $P(\tilde{x})$  относительно ее аргумента  $\tilde{x}$ . Известно, что классическая производная любого порядка  $n$  от любой детерминированной функции  $P(x)$  не обязательно представляет собой функцию класса  $P(x)/x^n$ . Поэтому такую производную в общем случае нельзя интерпретировать как скорость  $n$ -го порядка изменения функции  $P(x)$  относительно ее аргумента. Это означает, в свою очередь, что классическая производная Ньютона-Лейбница, в отличие от интервальной производной, вообще говоря, не может считаться адекватной моделью динамики большинства природных объектов и процессов. Другими словами, именно учет неопределенности исходных функций в форме интервальности их возможных значений делает производные от них адекватными моделями динамики природных процессов.

## 6 БЛАГОДАРНОСТИ

Настоящая статья содержит некоторые итоги НИР, выполненной в рамках гранта Российского фонда фундаментальных исследований № 12-06-00196 «Моделирование и оптимизация социально-экономических процессов с использованием методов интервальной математики».

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Автором в данной работе впервые получен полный набор производных любых порядков от всех существующих элементарных интервальных функций (формулы (15), (20), (25), (27), (33), (35), (40), (45), (50), (55), (60), (65), (70), (75)).

Научная новизна полученных результатов заключается как в самих полученных формулах, так и в том, что каждая из этих формул выражает набор интервальных производных всех возможных порядков  $n$  от данной интервальной функции. Практическая ценность выполненной работы состоит в необычайной простоте вычисления интервальных производных с помощью полученных формул: эти вычисления требуют всего лишь деления исходной интервальной функции на  $n$ -ю степень аргумента, где  $n$  – порядок вычисляемой производной.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. – М. : Наука, 2004. – 451 с.
- Заде Л. А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л. А. Заде. – М. : Мир, 1976. – 165 с.
- Алефельд Г. Введение в интервальные вычисления / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. – М. : Мир, 1987. – 360 с.
- Левин В. И. Интервальная производная и начала недетерминистского дифференциального исчисления / В. И. Левин // Онтология проектирования. – 2013. – № 4 (10). – С. 72–85.
- Левин В. И. Интервально-дифференциальное исчисление и некоторые его применения / В. И. Левин // Информационные технологии. – 2014. – № 7. – С. 3–10.
- Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Физматлит, 2001. – 616 с.
- Левин В. И. Дифференциальное исчисление для интервально-определенных функций / В. И. Левин // Эвристические алгоритмы и распределенные вычисления. – 2015. – Т. 2, № 2. – С. 8–25.

8. Вощинин А. П. Оптимизация в условиях неопределенности / А. П. Вощинин, Г. Р. Сотиров. – М. : Изд-во МЭИ, 1989. – 224 с.
9. Ащепков Л. Т. Универсальные решения интервальных задач оптимизации и управления / Л. Т. Ащепков, Д. В. Давыдов. – М. : Наука, 2006. – 285 с.
10. Moore R. E. Interval Analysis / R. E. Moore. – N. Y. : Prentice-Hall, 1966. – 230 p.
11. Libura M. Integer Programming Problems with Inexact Objective Function / M. Libura // Control and Cybernetics. – 1980. – Vol. 9, No. 4. – P. 189–202.

12. Куржанский А. Б. Задача идентификации – теория гарантированных оценок / А. Б. Куржанский // Автоматика и телемеханика. – 1991. – № 4. – С. 3–26.
13. Hyvonen E. Constraint Reasoning Based on Interval Arithmetic: the Tolerance Propagation Approach / E. Hyvonen // Artificial Intelligence. – 1992. – Vol. 58. – P. 19.
14. Левин В. И. Расчет и анализ поведения неполностью определенных функций методом детерминизации / В.И. Левин // Радиоэлектроника, информатика, управление. – 2016. – № 2.– С. 46–55.

Статья поступила в редакцию 21.06.2016.

После доработки 01.07.2016.

Левін В. І.

Д-р техн. наук, професор, провідний науковий співробітник Пензенського державного технологічного університету, Пенза, Росія  
**ПОХІДНІ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ІНТЕРВАЛЬНИХ ФУНКІЙ**

Розглянуто задачі, пов’язані з обчисленням похідних від інтервально-певних функцій. Ці задачі актуальні при вивченні систем з властивою їм чи іншим ступенем невизначеності (недетерміновані системи). Саме, мова йде про простих системах, які описуються елементарними інтервально-певними функціями. Відповідно до цього вирішуються задачі знаходження похідних від елементарних функцій зазначеного виду. При цьому використовуються отримані раніше формули і прийоми обчислення похідних від будь-яких інтервально-певних функцій. Наведено основні визначення, пов’язані з похідними від інтервально-певних функцій, а також формули двох типів, які дозволяють обчислювати зазначені інтервальні похідні. Формули першого типу висловлюють похідні в закритій інтервальному формі, яка вимагає використання апарату інтервального математики. Формули другого типу висловлюють похідні у відкритій інтервальному формі, у вигляді двох формул, перша з яких висловлює нижню межу інтервалу, що представляє шукану похідну, а друга – верхню межу, і обчислення похідної від інтервального функції зводиться до обчислення двох дійсних функцій. За допомогою викладеного математичного апарату були знайдені похідні від наступних елементарних інтервальних функцій: інтервального константи, інтервального стеченої функції, інтервального показовою функції, інтервального експоненційної функції, інтервального логарифмічної і натурально-логарифмічної функції, інтервальних тригонометричних функцій (синуса, косинуса, тангенса і котангенса), інтервальних зворотних тригонометричних функцій (арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса). Формули всіх похідних дані у відкритій інтервальному формі. Зазначено відміну інтервальних похідних інтервальних елементарних функцій від класичних похідних відповідних звичайних елементарних функцій.

**Ключові слова:** інтервал, інтервальна функція, інтервальна похідна, інтервально-диференціальнечислення, інтервальні обчислення.

Levin V. I.

Dr. Sc., Professor, Leading Scientist of Mathematical Department of Penza State Technological University, Penza, Russia

#### DERIVATIVES OF ELEMENTARY INTERVAL FUNCTIONS

The article deals with some problems related to calculation of derivatives of interval-specified functions. These problems are relevant in the study of systems with any level of uncertainty (nondeterministic systems). Specifically we will speak about simple systems described by elementary interval-specific functions. Accordingly we solved the problem of calculating derivatives of elementary interval-specified functions. Previously obtained formulas and methods of finding of derivatives of interval-defined functions are used. Basic definitions related to the derivatives of interval functions are given. We present formulas of two types that allow you to calculate interval derivatives. The first type formulas express derivatives in the closed interval form, which requires computing using the apparatus of interval mathematics. But formulas of the second type can express derivatives in the open interval form, i.e. in the form of two formulas. Formulas above expresses the lower and the upper limits of the interval representing the derivative. Here finding of the derivative of the interval-defined function is reduced to computation of two ordinary certain functions. Using above mathematical apparatus we find derivatives of all elementary interval functions: interval constant, interval power function, interval exponential function, interval logarithmic function, interval natural-logarithmic function, interval trigonometric functions (sine, cosine, tangent, cotangent), interval inverse trigonometric functions (arcsine, arccosine, arctangent, arccotangent). Formulas of all derivatives are shown in form of an open interval. The difference between derivatives of interval elementary functions and the derivatives of exact functions (not interval) elementary functions is discussed.

**Keywords:** interval value, interval function, interval derivatives, interval computations, interval-differential calculus.

#### REFERENCES

1. Gnedenko B. V. Kurs Teorii Veroyatnostey. Moscow, Nauka, 2004, 451 p.
2. Zadeh L. A. The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning, *Information Sciences*, 1975, No. 8, 9, P. 199–249, 301–357; 43–80.
3. Alefeld G., Herzberger J. Introduction to Interval Computations. N.Y, Academic Press, 1983, 360 p.
4. Levin V.I. Intervalnaya Proizvodnaya i Nachala Nedeterministskogo Differencialnogo Ischisleniya, *Ontologiya Proektirovaniya*, 2013, No. 4, pp. 72–84.
5. Levin V.I. Intervalno-Differencialnoe Ischislenie I Nekotorye Ego Primeneniya, *Informacionnye Tekhnologii*, 2014, No. 7, pp. 3–10.
6. Fikhtengolz G.M. Kurs Differencialnogo i Integralnogo Ischisleniya. Vol. 1. Moscow, Fizmatlit, 2001, 616 p.
7. Levin V. I. Differencialnoe Ischislenie dlya Intervalno-Opredelennyh Funkcij, *Evrysticheskie Algoritmy i Raspredelennye Vychisleniya*, 2015, Vol. 2, No. 2, pp. 8–25.
8. Voschinin A. P., Sotirov G. R. Optimizaciya v Usloviyah Neopredelennosti. Moscow, MEI Publishers, 1989, 224 p.
9. Aschepkov L. T., Davyдов D. V. Universalnye Resheniya Intervalnykh Zadach Optimizacii i Upravleniya. Moscow, Nauka, 2006, 285 p.
10. Moore R.E. Interval Analysis. N.Y, Prentice-Hall, 1966, 230 p.
11. Libura M. Integer Programming Problems with Inexact Objective Function, *Control and Cybernetics*, 1980, Vol. 9, No. 4, pp. 189–202.
12. Kurzhanskiy A. B. Identification Problem – Theory of Guaranteed Estimates, *Automation and Remote Control*, 1991, Vol. 52, No. 4, pp. 447–465.
13. Hyvonen E. Constraint Reasoning Based on Interval Arithmetic: the Tolerance Propagation Approach, *Artificial Intelligence*, 1992, Vol. 58, P. 19.
14. Levin V. I. Calculation and Analysis of Incompletely Defined Functions by Determination Method, *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 2016, No. 2, P. 46–55.

## УДК 519.6

Мотайло А. П.<sup>1</sup>, Хомченко А. Н.<sup>2</sup>, Тулученко Г. Я.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Старший викладач кафедри вищої математики і математичного моделювання Херсонського національного технічного університету, Херсон, Україна

<sup>2</sup>Д-р ф.-м. наук, професор, завідувач кафедри прикладної та вищої математики Чорноморського державного університету імені Петра Могили, Миколаїв, Україна

<sup>3</sup>Д-р техн. наук, професор кафедри вищої математики і математичного моделювання Херсонського національного технічного університету, Херсон, Україна

## ПОБУДОВА БАЗИСУ БІПІРАМІДІ

У статті біпіраміда вперше розглядається як 6-вузловий скінчений елемент (СЕ). Для побудови її біквадратичного базису використовуються два різних підходи: матричний спосіб та метод внутрішньої конденсації базису біпіраміди як 7-вузлового СЕ. Перший підхід дозволяє дослідити принципово можливу кількість базисів, а другий такої можливості не надає, але є більш економічним. Показано, що після задоволення традиційних вимог до базисних функцій у МСЕ у біквадратичних базисних функціях біпіраміди як 6-вузлового СЕ, які будуються за допомогою названих раніше підходів, залишається різна кількість невизначених коефіцієнтів. Ці коефіцієнти надалі використовуються для надання базисним функціям спеціальних властивостей, які адаптують їх до розв'язання граничних задач із рівнянням Лапласа. У якості критерію прогностичного оцінювання апроксимаційних властивостей СЕ у формі біпіраміди обрана величина сліду матриці жорсткості. Мінімізація сліду матриці жорсткості приводить до побудови одного і того ж біквадратичного базису при обох підходах.

На основі отриманого базису аналізуються межі припустимих деформацій геометричної форми біпіраміди. Вперше теоретично доведено, що існує СЕ, при використанні якого як комірки скінченно-елементної сітки, найкраща точність досягається при відхиленні геометричної форми СЕ від правильного багатогранника, у даному випадку від октаедра. Знайдено критичне значення коефіцієнта стиснення, яке забезпечує мінімум сліду матриці жорсткості для біпіраміди з геометричною формою, що досліджується.

Проведено обчислювальний експеримент, результати якого підтверджують теоретичний прогноз властивостей біпіраміди як СЕ. Виявлені залежності дозволяють припустити доцільність застосування базисів більш високого порядку для СЕ у формі біпіраміди.

**Ключові слова:** метод скінчених елементів, біпіраміда, слід матриці жорсткості, тетраедрально-октаедральна решітка.

### НОМЕНКЛАТУРА

МСЕ – метод скінчених елементів;

СЕ – скінчений елемент;

$K_i$  – вузли СЕ у формі біпіраміди,  $i = \overline{0;6}$ ;

$a, b, h$  – параметри, що визначають геометричні розміри тіла;

$p$  – коефіцієнт стиснення біпіраміди;

$(x; y; z)$  – декартові координати точки у тривимірному просторі;

$N_i$  – загальна базисна функція у формі повного поліному другого порядку від трьох змінних;

$k_j^{(i)}$  – коефіцієнти при мономах у виразах базисних функцій,  $i = \overline{1;6}$ ,  $j = \overline{1;10}$ ;

$NS$  – базис біпіраміди як 7-вузлового СЕ;

$NC$  – базис біпіраміди як 6-вузлового СЕ, отриманий в результаті застосування операції внутрішньої конденсації до базису  $NS$ ;

$NM$  – базис біпіраміди як 6-вузлового СЕ, побудований матричним способом;

$\{\alpha; \beta; \gamma\}$  – вагові коефіцієнти для операції внутрішньої конденсації;

*CoordKnots* – матриця координат вузлів біпіраміди;

*Monom* – вектор мономів поліному другого порядку;

*Coeff* – матриця коефіцієнтів базисних функцій біпіраміди, які побудовані матричним способом;

$C$  – матриця жорсткості;

*Trace* – слід матриці жорсткості;

$V$  – компактний топологічний простір;

$L_2(V)$  – середньоквадратична метрика;

$C(V)$  – метрика простору неперервних на компакті  $V$  функцій;

$\varepsilon_1$  – похибка чисельного розв'язку у метриці  $L_2(V)$ ;

$\varepsilon_2$  – похибка чисельного розв'язку у метриці  $C(V)$ ;

$T = T(x, y, z)$  – температура у довільній точці бруса;

$T = T(x, y, \text{const})$  – точний розв'язок задачі;

$\hat{T} = \hat{T}(x, y, z)$  – чисельний розв'язок задачі;

$V_i$  – область окремого скінченого елемента.

### ВСТУП

Головною перевагою застосування сіток з включенням комірок у формі октаедрів порівняно із виключно тетраедральними сітками є зменшення об'ємів розрахунків і, як наслідок, зростання швидкості реалізації МСЕ. Один 7-вузловий октаедр замінює 8 чотиривузлові тетраедри.

Звичайно вимога дотримання рівномірності сітки є обтяжливою при реалізації методу СЕ [1]. Тому актуальною є задача дослідження впливу відхилень форми СЕ від правильного геометричного тіла (в даному випадку від октаедра) на обчислювальні характеристики такого елемента. Особливо актуальною ця задача є для СЕ, які використовуються у приграницьому шарі, коли один (або кілька) вузлів переносять на границю області для кращої апроксимації її геометрії.

Метою дослідження є встановлення умов застосування біпірамід у скінченно-елементних решітках.

### 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Для досягнення мети дослідження необхідно розв'язати низку послідовних задач, що наводяться нижче. На основі заданих координат вершин біпіраміди (рис. 1):

$$K_{1,3}(\pm a; 0; 0); K_{2,4}(0; \pm a; 0); K_5 = (0; 0; pa);$$

$$K_6 = (0; 0; -a);$$

де  $a > 0$ ,  $p > 0$ ,  $a \in R$ ,  $p \in R$ .

Необхідно знайти значення невідомих коефіцієнтів у виразах базисних функцій біпіраміди:

$$N_i = k_0^{(i)} + k_1^{(i)}x + k_2^{(i)}y + k_3^{(i)}z + k_4^{(i)}x^2 + k_5^{(i)}y^2 + \\ + k_6^{(i)}z^2 + k_7^{(i)}xy + k_8^{(i)}xz + k_9^{(i)}yz, \quad i = \overline{1; 6}, \quad (1)$$

як 6-вузлового СЕ другого порядку, за двома підходами: матричним способом ( $N_i = NM_i$ ) і з застосуванням операції внутрішньої конденсації ( $N_i = NC_i$ ).

Для цього обґрунтовано скласти перелік вимог до базисних функцій біпіраміди із відомих у МСЕ вимог до базисних функцій, який приводить до однозначного визначення коефіцієнтів базисних функцій біпіраміди.

Показати, що функція сліду матриці жорсткості біпіраміди залежить від двох аргументів  $Trace = Trace(a; p)$ , які визначають геометричну форму СЕ. Знайти мінімум функції  $Trace(a; p) \rightarrow \min$  для довільного значення аргументу  $a$  та координати точки мінімуму.

Перевірити на конкретних прикладах загальне теоретичне положення МСЕ про те, що кращими апроксимаційними властивостями володіє той базис, матриця жорсткості якого має менший слід. Оцінку точності наближеного розв'язку, отриманого МСЕ із використанням решіток з комірками у формі біпірамід та тетраедрів, відносно точного розв'язку, отриманого методом Фур'є, здійснити використовуючи середньоквадратичну метрику  $L_2(V)$  та метрику простору неперервних на компакті  $V$  функцій  $C(V)$ .

## 2 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Вперше про застосування октаедра як СЕ стало відомо завдяки роботам [2, 3]. Кусково-лінійні [2] та квадратичні базисні функції [3] побудовані для вершин та точки перетину діагоналей багатогранника (тобто октаедр розглядається як 7-вузловий СЕ). При цьому автором роботи [3] відзнача-

чається, що октаедр із квадратичним базисом є неузгодженим СЕ із 4-вузловим (лінійним) тетраедром.

Як відомо, СЕ без внутрішніх вузлів є більш економічними у плані використання обчислювальних ресурсів при реалізації МСЕ. У роботі [4] виконано операцію внутрішньої конденсації та здійснено перехід до нового базису октаедра як 6-вузлового СЕ.

Переваги застосування октаедрів у скінченно-елементних сітках обмежуються частинами цих сіток, де мають місце рівномірні розбиття. Тому доцільною є побудова СЕ, який зберігає переваги октаедра, але може застосовуватися в нерівномірних сітках.

Дослідження щодо впливу деформацій октаедра (при його трансформації у біпіраміду) на обчислювальні характеристики такого СЕ у доступній літературі не виявлено. Таким чином, існує необхідність вивчення питання наявності у нового математичного об'єкту традиційних для МСЕ властивостей.

Для побудови базисних функцій СЕ нового виду застосуємо матричний спосіб, описаний, зокрема, у роботах [5, 7, 8], та метод внутрішньої конденсації [6]. Перший дозволяє досліджувати принципово можливу кількість базисів СЕ, що задовільняють певним вимогам. Другий є більш раціональним щодо економії обчислювальних ресурсів порівняно із попереднім способом, але обмежує різноманіття базисів СЕ серендипового типу лінійними комбінаціями базисних функцій відповідного СЕ лагранжевого типу.

Для прогнозування апроксимаційних властивостей СЕ скористаємося критерієм на основі величини сліду матриці жорсткості [8].

Критерій щодо величини припустимих відхилень геометрії СЕ від правильної форми багатокутників або багатогранників описані у роботах [9–10].

## 3 МАТЕРІАЛИ ТА МЕТОДИ

**Побудова базису біпіраміди як 7-вузлового СЕ.** Виведемо рівняння базисних функцій біпіраміди як для СЕ з 7 вузлами. Будемо розглядати 8-гранну біпіраміду, в якій відрізок  $K_0K_5$  (рис. 1) може бути довільної довжини:

$$K_0K_5 = p \cdot a = b, \text{де } p > 0 \text{ і } p \in R.$$

Побудова перших шести базисних функцій є очевидною із традиційної для МСЕ вимоги рівності базисної функції в своєму вузлу одиниці і нулью – в усіх інших вузлах [5]:

$$NS_{1,3} = \frac{1}{2a^2} x(x \pm a); \quad NS_{2,4} = \frac{1}{2a^2} y(y \pm a);$$

$$NS_5 = \frac{1}{b(a+b)} z(z+a); \quad NS_6 = \frac{1}{a(a+b)} z(z-b). \quad (2)$$

Вираз останньої базисної функції біпіраміди у вузлу  $K_0$  знайдемо із умови рівності одиниці суми всіх базисних функцій [5]:

$$NS_0 = 1 - \sum_{i=1}^6 NS_i, \text{де } i = \overline{1; 6}. \quad (3)$$

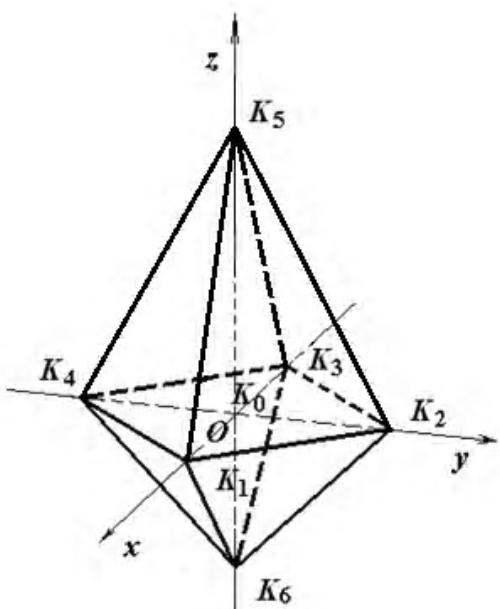


Рисунок 1 – Біпіраміда як СЕ

Із (3), з урахуванням (2), маємо

$$NS_0 = 1 - \frac{1}{pa^2} \left( p \cdot (x^2 + y^2) + z^2 - a(p-1)z \right) \text{ або}$$

$$NS_0 = \frac{(p+1)^2}{4p} \cdot F, \quad (4)$$

$$\text{де } F = 1 - \frac{(x^2 + y^2)}{\frac{1 \cdot a^2 \cdot (p+1)^2}{4}} - \frac{(z - z_0)^2}{\frac{a^2 \cdot (p+1)^2}{4}}.$$

Із виразу (4) видно, що поверхні рівня базисної функції  $NS_0$  є еліпсоїдами зі зміщеними по осі  $Oz$  центрами, якщо початок системи координат пов'язувати із вузлом  $K_0$ .

**Побудова узагальненого базису біпіраміди шляхом внутрішньої конденсації.** Розподілимо внесок базисної функції  $NS_0$  (4), яка асоційована з внутрішнім вузлом  $K_0$ , між базисними функціями, які асоційовані із зовнішніми вузлами, тобто здійснимо операцію внутрішньої конденсації [6]:

$$NC_i = NS_i + \alpha \cdot NS_0, \quad i = 1..4;$$

$$NC_5 = NS_5 + \beta \cdot NS_0, \quad NC_6 = NS_6 + \gamma \cdot NS_0, \quad (5)$$

де  $4\alpha + \beta + \gamma = 1$ ;  $0 \leq \alpha \leq 0,25$ .

Вимоги рівності базисної функції в своєму вузлу одиниці і нулю – в усіх інших вузлах і вимога рівності суми базисних функцій одиниці для функцій (5) виконуються автоматично [6]. Перевірка виконання вимоги повноти базису (5) [7]:

$$x = \sum_{i=1}^6 x_i \cdot NC_i(x; y; z); \quad y = \sum_{i=1}^6 y_i \cdot NC_i(x; y; z);$$

$$z = \sum_{i=1}^6 z_i \cdot NC_i(x; y; z); \quad (6)$$

де  $(x_i; y_i; z_i)$  – координати вузлів біпіраміди;  $NC_i(x; y; z)$  – базисні функції біпіраміди після операції внутрішньої конденсації, – показує, що для виконання останніх рівностей необхідно ввести додаткові співвідношення між значеннями вагових коефіцієнтів:

$$\beta = \frac{1-4\alpha}{p+1}; \quad \gamma = \frac{p}{p+1} \cdot (1-4\alpha). \quad (7)$$

Враховуючи інтервал зміни вагового коефіцієнта  $\alpha$ :  $0 \leq \alpha \leq 0,25$ , маємо такі обмеження для коефіцієнта  $\beta$ :  $0 \leq \beta \leq 1/(p+1)$  та  $\gamma$ :  $0 \leq \gamma \leq p/(p+1)$ .

Отже, базисні функції конденсованого базису визначаються за формулами (5) і (7).

Очевидно, що після задоволення усіх традиційних вимог до базисних функцій у МСЕ залишається невизначеним один параметр  $\alpha$ . Ним можна скористатися для надання базису спеціальних властивостей.

**Побудова узагальненого базису біпіраміди матричним способом.** Оскільки метод внутрішньої конденсації працює виключно із базисними функціями, які попередньо визначені для елемента з внутрішнім вузлом, тому доцільно перевірити існування інших базисів біпіраміди з квадратичними функціями.<sup>2</sup>

Матриця координат вузлів біпіраміди (рис. 1) має вигляд:

$$CoordKnots = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & pa \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}.$$

Базисні функції будемо шукати у вигляді поліномів другого степеню (1).

Вектор мономів такого поліному має вигляд:

$$Monom = (1; x; y; z; x^2; y^2; z^2; xy; xz; yz).$$

Із коефіцієнтів всіх базисних функцій утворимо матрицю коефіцієнтів:

$$Coeff = \begin{pmatrix} k_0^{(1)} & k_1^{(1)} & k_2^{(1)} & \dots & k_9^{(1)} \\ k_0^{(2)} & k_1^{(2)} & k_2^{(2)} & \dots & k_9^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_0^{(6)} & k_1^{(6)} & k_2^{(6)} & \dots & k_9^{(6)} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

За введених позначень вектор базисних функцій знаходиться за формулою:

$$NM = Coeff \cdot Monom^T.$$

Врахуємо наявні симетрії у біпіраміді. Біпіраміда є симетричною відносно площини  $y=0$ , тому базисні функції  $NM_1$  і  $NM_3$  повинні бути парними за змінною  $y$ , тобто не містити доданків із змінною  $y$  у непарних степенях. Це означає, що дорівнюють нулю такі коефіцієнти:

$$k_2^{(1)} = k_7^{(1)} = k_9^{(1)} = 0 \text{ і } k_2^{(3)} = k_7^{(3)} = k_9^{(3)} = 0.$$

Аналогічно через симетричність біпіраміди відносно площини  $x=0$  у виразах базисних функцій  $NM_2$  і  $NM_4$  дорівнюють нулю такі коефіцієнти:

$$k_1^{(2)} = k_7^{(2)} = k_8^{(2)} = 0 \text{ і } k_1^{(4)} = k_7^{(4)} = k_8^{(4)} = 0.$$

Симетричність біпіраміди відносно тих же площин у рівняннях базисних функцій  $NM_5$  і  $NM_6$  приводить до рівності нулю коефіцієнтів:

$$k_1^{(5)} = k_2^{(5)} = k_7^{(5)} = k_8^{(5)} = k_9^{(5)} = 0$$

$$\text{і } k_1^{(6)} = k_2^{(6)} = k_7^{(6)} = k_8^{(6)} = k_9^{(6)} = 0.$$

Таким чином матриця коефіцієнтів базисних функцій (8) набуває вигляду:

$$\text{Coeff} = \begin{pmatrix} k_0^{(1)} & k_1^{(1)} & 0 & k_3^{(1)} & k_4^{(1)} & k_5^{(1)} & k_6^{(1)} & 0 & k_8^{(1)} & 0 \\ k_0^{(2)} & 0 & k_2^{(2)} & k_3^{(2)} & k_4^{(2)} & k_5^{(2)} & k_6^{(2)} & 0 & 0 & k_9^{(2)} \\ k_0^{(3)} & k_1^{(3)} & 0 & k_3^{(3)} & k_4^{(3)} & k_5^{(3)} & k_6^{(3)} & 0 & k_8^{(3)} & 0 \\ k_0^{(4)} & 0 & k_2^{(4)} & k_3^{(4)} & k_4^{(4)} & k_5^{(4)} & k_6^{(4)} & 0 & 0 & k_9^{(4)} \\ k_0^{(5)} & 0 & 0 & k_3^{(5)} & k_4^{(5)} & k_5^{(5)} & k_6^{(5)} & 0 & 0 & 0 \\ k_0^{(6)} & 0 & 0 & k_3^{(6)} & k_4^{(6)} & k_5^{(6)} & k_6^{(6)} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вимога рівності одиниці базисної функції у своєму вузлу і нуль в усіх інших вузлах приводить до 6 систем рівнянь, які в матричному вигляді записуються так:

$$\text{Coeff}(i, 1..10) \cdot \text{Monom\_in\_Knots}^T = E(i, 1..6), \quad (9)$$

де  $i = \overline{1; 6}$ ;  $E$  – одинична матриця розміром  $6 \times 6$ .

Матриця значень мономів у вузлових точках має вигляд:

$$\text{Monom\_in\_Knots} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -a & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -a & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & pa & 0 & 0 & p^2 a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Всі шість систем (9) є сумісними, але невизначеними, тому з них можемо однозначно знайти тільки частину значень коефіцієнтів:

$$\overline{\text{Coeff}} = \begin{pmatrix} -a^2 p k_6^{(1)} & \frac{1}{2a} & 0 & a(1-p)k_6^{(1)} & p k_6^{(1)} + \frac{1}{2a^2} & p k_6^{(1)} & k_6^{(1)} & 0 & k_8^{(1)} & 0 \\ -a^2 p k_6^{(2)} & 0 & \frac{1}{2a} & a(1-p)k_6^{(2)} & p k_6^{(2)} & p k_6^{(2)} + \frac{1}{2a^2} & k_6^{(2)} & 0 & 0 & k_9^{(2)} \\ -a^2 p k_6^{(3)} & -\frac{1}{2a} & 0 & a(1-p)k_6^{(3)} & p k_6^{(3)} + \frac{1}{2a^2} & p k_6^{(3)} & k_6^{(3)} & 0 & k_8^{(3)} & 0 \\ -a^2 p k_6^{(4)} & 0 & -\frac{1}{2a} & a(1-p)k_6^{(4)} & p k_6^{(4)} & p k_6^{(4)} + \frac{1}{2a^2} & k_6^{(4)} & 0 & 0 & k_9^{(4)} \\ -a^2 p k_6^{(5)} + \frac{1}{p+1} & 0 & 0 & a(1-p)k_6^{(5)} + \frac{1}{a(p+1)} & p k_6^{(5)} - \frac{1}{a^2(p+1)} & p k_6^{(5)} - \frac{1}{a^2(p+1)} & k_6^{(5)} & 0 & 0 & 0 \\ -a^2 p k_6^{(6)} + \frac{p}{p+1} & 0 & 0 & a(1-p)k_6^{(6)} - \frac{1}{a(p+1)} & p k_6^{(6)} - \frac{p}{a^2(p+1)} & p k_6^{(6)} - \frac{p}{a^2(p+1)} & k_6^{(6)} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Врахуємо вимогу повноти базису (6). Напишемо тепер її у матричному вигляді:

$$\text{CoordKnots}^T \cdot \overline{\text{Coeff}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Добуток матриць  $\text{CoordKnots}^T \cdot \overline{\text{Coeff}}$  дорівнює:

$$\text{CoordKnots}^T \cdot \overline{\text{Coeff}} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^3 p (k_6^{(3)} - k_6^{(1)}) & 1 & 0 & a^2(1-p)(k_6^{(1)} - k_6^{(3)}) & ap(k_6^{(1)} - k_6^{(3)}) & ap(k_6^{(1)} - k_6^{(3)}) & 0 & a(k_8^{(1)} - k_8^{(3)}) & 0 \\ a^3 p (k_6^{(4)} - k_6^{(2)}) & 0 & 1 & a^2(1-p)(k_6^{(2)} - k_6^{(4)}) & ap(k_6^{(2)} - k_6^{(4)}) = 0 & ap(k_6^{(2)} - k_6^{(4)}) = 0 & ap(k_6^{(2)} - k_6^{(4)}) = 0 & 0 & a(k_9^{(2)} - k_9^{(4)}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a(k_6^{(6)} - pk_6^{(5)}) & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Тотожність (10) із врахуванням виразу її правої частини (11) приводить до трьох узгоджених систем рівнянь, із яких знаходимо:

$$\left. \begin{array}{l} k_6^{(1)} = k_6^{(3)} \\ k_8^{(1)} = k_8^{(3)} \end{array} \right\}; \quad \left. \begin{array}{l} k_6^{(2)} = k_6^{(4)} \\ k_9^{(2)} = k_9^{(4)} \end{array} \right\}; \quad k_6^{(5)} = \frac{1}{p} k_6^{(6)}. \quad (12)$$

Після врахування розв'язків (12) систем (10–11) матриця  $\overline{\text{Coeff}}$  набуває вигляду:

$$\overline{\text{Coeff}} = \begin{pmatrix} -a^2 p k_6^{(3)} & \frac{1}{2a} & 0 & a(1-p)k_6^{(3)} & p k_6^{(3)} + \frac{1}{2a^2} & p k_6^{(3)} & k_6^{(3)} & 0 & k_8^{(3)} & 0 \\ -a^2 p k_6^{(4)} & 0 & \frac{1}{2a} & a(1-p)k_6^{(4)} & p k_6^{(4)} & p k_6^{(4)} + \frac{1}{2a^2} & k_6^{(4)} & 0 & 0 & k_9^{(4)} \\ -a^2 p k_6^{(3)} & -\frac{1}{2a} & 0 & a(1-p)k_6^{(3)} & p k_6^{(3)} + \frac{1}{2a^2} & p k_6^{(3)} & k_6^{(3)} & 0 & k_8^{(3)} & 0 \\ -a^2 p k_6^{(4)} & 0 & -\frac{1}{2a} & a(1-p)k_6^{(4)} & p k_6^{(4)} & p k_6^{(4)} + \frac{1}{2a^2} & k_6^{(4)} & 0 & 0 & k_9^{(4)} \\ -a^2 p k_6^{(6)} + \frac{1}{p+1} & 0 & 0 & a(1-p)k_6^{(6)} + \frac{1}{a(p+1)} & p k_6^{(6)} - \frac{1}{a^2(p+1)} & p k_6^{(6)} - \frac{1}{a^2(p+1)} & \frac{1}{p} k_6^{(6)} & 0 & 0 & 0 \\ -a^2 p k_6^{(6)} + \frac{p}{p+1} & 0 & 0 & a(1-p)k_6^{(6)} - \frac{1}{a(p+1)} & p k_6^{(6)} - \frac{p}{a^2(p+1)} & p k_6^{(6)} - \frac{p}{a^2(p+1)} & k_6^{(6)} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Зайдемо частину коефіцієнтів із умови, що сума всіх базисних функцій дорівнює 1. Для цього знайдемо суми елементів матриці (13) по стовпцям:

$$\sum_{i=1}^6 NM_i = 1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} k_6^{(3)} = -k_6^{(4)} - \frac{p+1}{2p} k_6^{(6)} \\ k_8^{(3)} = 0 \\ k_9^{(4)} = 0 \end{array} \right\}. \quad (14)$$

Матриця (13) набуває нового вигляду з додатковими вимогами (14):

$$\overline{\overline{\text{Coeff}}} = \begin{pmatrix} a^2 \cdot \left( k_6^{(4)} + \frac{p+1}{2} k_6^{(6)} \right) & \frac{1}{2a} & 0 & a \cdot \frac{p-1}{p} \cdot \left( p k_6^{(4)} + \frac{p+1}{2} k_6^{(6)} \right) & -\left( k_6^{(4)} + \frac{p+1}{2} k_6^{(6)} \right) + \frac{1}{2a^2} & -\left( k_6^{(4)} + \frac{p+1}{2} k_6^{(6)} \right) & -k_6^{(4)} - \frac{p+1}{2p} k_6^{(6)} & 0 & 0 & 0 \\ -a^2 p k_6^{(4)} & 0 & \frac{1}{2a} & a(1-p)k_6^{(4)} & p k_6^{(4)} & p k_6^{(4)} + \frac{1}{2a^2} & k_6^{(4)} & 0 & 0 & 0 \\ a^2 \cdot \left( p k_6^{(4)} + \frac{p+1}{2} k_6^{(6)} \right) & -\frac{1}{2a} & 0 & a \cdot \frac{p-1}{p} \cdot \left( p k_6^{(4)} + \frac{p+1}{2} k_6^{(6)} \right) & -\left( k_6^{(4)} + \frac{p+1}{2} k_6^{(6)} \right) + \frac{1}{2a^2} & -\left( k_6^{(4)} + \frac{p+1}{2} k_6^{(6)} \right) & -k_6^{(4)} - \frac{p+1}{2p} k_6^{(6)} & 0 & 0 & 0 \\ -a^2 p k_6^{(4)} & 0 & -\frac{1}{2a} & a(1-p)k_6^{(4)} & p k_6^{(4)} & p k_6^{(4)} + \frac{1}{2a^2} & k_6^{(4)} & 0 & 0 & 0 \\ -a^2 k_6^{(6)} + \frac{1}{p+1} & 0 & 0 & a(1-p)k_6^{(6)} + \frac{1}{a(p+1)} & k_6^{(6)} - \frac{1}{a^2(p+1)} & k_6^{(6)} - \frac{1}{a^2(p+1)} & \frac{1}{p} k_6^{(6)} & 0 & 0 & 0 \\ -a^2 p k_6^{(6)} + \frac{p}{p+1} & 0 & 0 & a(1-p)k_6^{(6)} - \frac{1}{a(p+1)} & p k_6^{(6)} - \frac{p}{a^2(p+1)} & p k_6^{(6)} - \frac{p}{a^2(p+1)} & k_6^{(6)} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Отже, з урахуванням всіх вимог, базисні функції біпряміди знаходяться за формулою:

$$NM = \overline{\overline{\text{Coeff}}} \cdot \text{Monom}^T. \quad (15)$$

Таким чином, невідомими залишаються значення двох коефіцієнтів  $k_6^{(4)}$  і  $k_6^{(6)}$ , які можна визначити, використовуючи специфічні вимоги до базисних функцій.

**Побудова базисів біпряміди із мінімальним слідом матриці жорсткості.** У загальному випадку для набору базисних функцій  $\{N_i\}$  слід матриці жорсткості  $C$  з одничною матрицею коефіцієнтів пружності [5] обчислюється за формулою:

$$Trace = \sum_{i=1}^6 \iiint_V \left( \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial N_i}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial N_i}{\partial z} \right)^2 \right) dV. \quad (16)$$

**Мінімізація сліду матриці жорсткості для базису біпряміди, який отримано матричним способом.** Підставимо базисні функції (15) у формулу (16). Отримана функція сліду матриці жорсткості є функцією двох незалежних змінних  $k_6^{(4)}$  і  $k_6^{(6)}$ :  $Trace = Trace(k_6^{(4)}, k_6^{(6)})$ . За своюю структурою вона може мати тільки мінімум, тому за необхідною умовою існування екстремуму функції двох змінних знаходимо, що [8]:

$$\begin{aligned} k_6^{(4)} &= -\frac{1}{4a^2} \cdot \frac{10p^3 - p^2 + 20p - 5}{15p^4 + p^3 + 18p^2 - 3p + 5}; \\ k_6^{(6)} &= \frac{p}{a^2} \cdot \frac{10p^3 - p^2 + 20p - 5}{15p^5 + 16p^4 + 19p^3 + 15p^2 + 2p + 5}. \end{aligned} \quad (17)$$

А мінімально можливий слід матриці жорсткості залежить від параметра видовження  $p$  за формулою:

$$Trace = \frac{a}{15} \cdot \frac{230p^6 + 462p^5 + 653p^4 + 620p^3 + 372p^2 + 214p + 185}{(p+1)(5p^2 + 2p + 5)(3p^2 - p + 1)}. \quad (18)$$

**Мінімізація сліду матриці жорсткості для базису біпіраміди, який отримано шляхом внутрішньої конденсації.** Підставимо базисні функції (4, 6) у формулу (16). Отримана функція сліду матриці жорсткості є функцією однієї незалежної змінної  $\alpha$ :  $Trace = Trace(\alpha)$ . Також із необхідної умови існування екстремуму функції однієї змінної знаходимо значення  $\alpha$  та інших вагових коефіцієнтів за формулами (7):

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{p}{4} \cdot \frac{10p^3 - p^2 + 20p - 5}{(5p^2 + 2p + 5)(3p^2 - p + 1)} \\ \frac{dTrace}{da} = 0 \Rightarrow \beta &= \frac{5p^4 + 2p^3 - 2p^2 + 2p + 5}{(p+1)(5p^2 + 2p + 5)(3p^2 - p + 1)} \\ \gamma &= \frac{p}{p+1} \cdot \frac{5p^4 + 2p^3 - 2p^2 + 2p + 5}{(5p^2 + 2p + 5)(3p^2 - p + 1)} \end{aligned} \right\}. \quad (19)$$

Обчислення сліду матриці жорсткості за формулою (16) із базисними функціями (4) і ваговими коефіцієнтами (19) приводять до виразу, який співпадає із виразом (18) сліду матриці жорсткості для базису, що побудований матричним способом (15, 17).

Дослідження на екстремум функції сліду матриці жорсткості (теплопровідності) для біпіраміди (18) показують, що мінімум досягається при  $p \approx 0,7584$ , і складає приблизно 2,4776. Перевіримо ефективність застосування отриманого значення параметру  $p$  стиснення біпіраміди при розв'язанні методом скінчених елементів задачі теорії поля.

#### 4 ЕКСПЕРИМЕНТИ

Розглянемо прямокутний брус  $V = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq h\}$ , де  $a, b, h > 0$ , який виготовлено з ізотропного матеріалу. Одна з його граней підтримується при температурі  $T = f(y)$ , решта граней – при температурі  $T = 0$ .

Стаціонарний розподіл температури задовільняє рівняння Лапласа:

$$\Delta T = 0, \quad (20)$$

де  $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$  – оператор Лапласа,  $T = T(x, y, z)$  – температура у довільній точці бруса  $V$ , з граничними умовами Діріхле:

$$\begin{aligned} T|_{x=0} &= T|_{y=0} = T|_{y=b} = T|_{z=0} = T|_{z=h} = 0, \\ T|_{x=a} &= f(y). \end{aligned} \quad (21)$$

Аналітичний розв'язок задачі (20–21), отриманий у роботі [11], порівняємо із чисельним, знайденим методом скінчених елементів із використанням решіток тетраедральної та тетраедрально-октаедральної структур [12].

#### 5 РЕЗУЛЬТАТИ

У табл. 1 представлена розрахунки похибки чисельного розв'язку по області бруса  $V$  лінійних розмірів

Таблиця 1 – Похибка обчислювального експерименту

Похибка по області бруса $V$	Структура скінченно-елементної решітки			Тетраедральна	
	Тетраедрально-октаедральна		Базисні функції біпіраміди (4), (6) $p = 1$	Кусково-лінійні базисні функції октаедра [12] $p = 0,7584$	
$\varepsilon_1$	0,73	0,69	0,73	0,48	
$\varepsilon_2$	3,27	3,42	3,27	3,75	

$a = b = 1, h = 2$  при заданій температурі  $f(y) = t_0 y(b - y)$ , де  $t_0 = 20$  у середньоквадратичному:

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (T(x, y, const) - \hat{T}_i(x, y, z))^2}.$$

та у метриці простору неперервних на компакті  $V$  функцій  $C(V)$ :

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \max_{(x, y, z) \in V_i} (T(x, y, const) - \hat{T}(x, y, z))^2},$$

де  $T = T(x, y, const)$  і  $\hat{T} = \hat{T}(x, y, z)$  – точний та чисельний розв'язки задачі,  $V_i$  – область скінченого елемента  $\left( V = \bigcup_{i=1}^n V_i \right)$ ,  $n$  – кількість скінчених елементів.

При цьому у ансамблі із лінійним тетраедром [7] тестиувалися базисні функції октаедра (біпіраміди), задані формулами (5), (7) для  $p = 1$  та  $p = 0,7584$ , а також кусково-лінійні функції [12].

#### 6 ОБГОВОРЕННЯ

Аналізуючи результати чисельного експерименту, слід відмітити, що використання біпіраміди із коефіцієнтом видовження  $p = 0,7584$  у ансамблі із лінійним тетраедром є ефективним за точністю обчислень порівняно з аналогічною за структурою решіткою із комірками у формі октаедрів при  $p = 1$ . При цьому неузгодженість [7] скінчених елементів різної топології виявляється більш слабким критерієм вибору базисних функцій, ніж мінімальний слід матриці теплопровідності (жорсткості). Найменша (у даному експерименті) похибка у середньоквадратичному отримана при використанні тетраедральної решітки за рахунок більш дрібних комірок та потребує більшого часу для реалізації програмного модуля, створеного безпосередньо авторами статті. В свою чергу, розрахунок похибки у метриці простору  $C(V)$  вказує на перевагу використання альтернативної решітки у МСЕ із використанням октаедрів при  $p = 1$ . Також відзначимо, що значення

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \max_{(x, y, z) \in V_i} (T(x, y, const) - \hat{T}(x, y, z))^2} \quad \text{досяга-}$$

ються на гранях скінчених елементів незалежно від структури решітки. Останнє означає, що може бути доцільним побудова базису біпіраміди більш високого порядку.

Таким чином, нами вперше знайдено СЕ, для якого найкраща (у середньо-квадратичному сенсі) точність прогнозується при відсутності правильної геометричної форми.

У програмних продуктах, що реалізують МСЕ (зокрема, у ANSYS) для характеристики комірок сітки використовують показник асиметрії Skewness, який розраховується із міркувань обрання за еталон СЕ правильної геометричної форми [9, 10]. Для обчислень з високими вимогами до точності отримуваних розв'язків традиційно вважають припустимими відхилення у межах  $\pm 0,1$  від об'єму правильного геометричного тіла, при невисоких вимогах до точності розв'язків вважають припустимими відхилення у межах  $\pm 0,25$  від того ж об'єму.

Тоді по аналогії із традиційними рекомендаціями на практиці слід використовувати біпіраміди з коефіцієнтом видовження  $0,51 \leq p \leq 1,01$  при невисоких вимогах до точності отримуваних розв'язків і  $0,66 \leq p \leq 0,86$  – при високих вимогах до точності отримуваних розв'язків.

## ВИСНОВКИ

У роботі вперше узагальнено СЕ у формі октаедра до СЕ більш довільної геометричної форми, а саме, біпіраміди, що дозволяє використовувати новий СЕ у частинах сітки, де відбувається згущення комірок, або у приграницій зоні. Це дозволяє розширити можливості практичного застосування СЕ у формі біпіраміди у скінченно-елементних сітках порівняно із обмеженнями застосування СЕ у формі октаедра виключно в рівномірних сітках.

Для нового СЕ у формі біпіраміди вперше обґрунтовано перелік вимог до базисних функцій, який забезпечує їх однозначне визначення. Показано, що залучення традиційних вимог до базисних функцій, при побудові базисів біпіраміди за двома підходами: матричним способом і методом внутрішньої конденсації, не дозволяє остаточно визначити значення всіх коефіцієнтів, які входять до їх складу. Це дозволяє надавати базисам біпіраміди додаткових доцільних у МСЕ властивостей.

Вперше показано, що при залученні вимоги мінімізації сліду матриці жорсткості, базиси біпіраміди, які побудовані за двома вказаними вище підходами, співпадають. Це дозволяє рекомендувати метод внутрішньої конденсації як більш доцільний для практичного використання із міркувань економії обчислювальних ресурсів.

Авторами вперше у теорії МСЕ знайдено елемент у формі біпіраміди, якому за величиною сліду матриці жорсткості прогнозуються кращі апроксимаційні властивості не при правильній геометричній формі (октаедра), а при відхиленні від неї. У роботі вперше теоретично розраховані припустимі відхилення біпіраміди від форми октаедра. Вони виявилися несподіваними і такими, що не відповідають традиційним уявленням про умови досягнення найкращої точності на різних сітках СЕ. Знайдені межі зміни параметра стиснення біпіраміди дозволяють будувати скінченно-елементні сітки із включен-

ням комірок у формі біпірамід із задовільними обчислювальними властивостями.

Результати обчислювального експерименту із використанням решіток на основі досліджуваного елемента підтверджують ефективність застосування біпірамід із критичним значенням коефіцієнту стиснення. Очевидно, що отриманий СЕ заслуговує більш широкого застосування у практиці МСЕ.

## ПОДЯКИ

Дослідження виконані у відповідності до пріоритетного напрямку розвитку науки і техніки в Україні на період до 2020 року: «Інформаційні та комунікаційні технології» за темами: «Геометричне моделювання на дискретних елементах правильної просторової форми» (номер державної реєстрації 0111U007990) та «Розробка методів комп’ютерного дослідження математичних моделей фізичних полів» (номер державної реєстрації 0111U007951). Фінансування здійснюється за рахунок особистих коштів виконавців.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Алгоритм построения трехмерной адаптированной сетки для задач аэродинамики, решаемых методом конечных элементов / [Ю. А. Крашаница, А. В. Бахир, В. А. Тараненко, Ю. С. Машенко] // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – 2014. – № 66. – С. 105–110.
2. Greiner G. Hierarchical tetrahedral-octahedral subdivision for volume visualization / G. Greiner, R. Gross // The Visual Computer. – 2000. – I. 16. – P. 357–369.
3. de Brujin H. Numerical Method for 3D Ideal Flow [Electronic resource] / Han de Bruijn – Access mode: <http://hdebruin.soo.dto.tudelft.nl/jaar2010/octaeder.pdf>.
4. Мотайло А. П. Базисы шестиузлового октаэдра [Электронный ресурс] / А. П. Мотайло. – Материалы международной научно-практической конференции «Перспективные научные исследования – 2011». Серия: Математика: Прикладная математика (17–25 февраля 2011 г.). – София, Болгария. – Режим доступа: [http://www.rusnauka.com/Page\\_ru.htm](http://www.rusnauka.com/Page_ru.htm).
5. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. – М. : Мир, 1979. – 392 с.
6. Шопов П. Й. Метод конденсации для задач механики несжимаемых флюидов / П. Й. Шопов // Сердика : Българско математическо списание. – 1984. – Т. 10. – С. 198–205.
7. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 541 с.
8. Секулович М. Метод конечных элементов / М. Секулович. – М. : Стройиздат, 1993. – 664 с.
9. Checking the Skewness // ANSYS Icepak 12.1: User's Guide [Electronic resource]. – Access data: <http://orange.engr.ucdavis.edu/Documentation12.1/121/ICEPAK/iceug.pdf>
10. ANSYS Fluent. [Electronic resource]. – Access data: <https://www.sharcnet.ca/Software/Fluent6/html/udf/node1.htm>
11. Несис Е. И. Методы математической физики / Е. И. Несис. – М. : Просвещение, 1977. – 199 с.
12. Мотайло А. П. О численном решении стационарной задачи теплопроводности методом конечных элементов на решетке тетраэдрально-октаэдральной структуры / А. П. Мотайло // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2014. – №25(196), Вып. 37. – Белгород: «НИУ БелГУ», 2014. – С. 119–127.

Стаття надійшла до редакції 29.06.2016.  
Після доробки 04.07.2016.

Мотайлло А. П.<sup>1</sup>, Хомченко А. Н.<sup>2</sup>, Тулученко Г. Я.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Старший преподаватель кафедры высшей математики и математического моделирования Херсонского национального технического университета, Херсон, Украина

<sup>2</sup>Д-р ф.-м. наук, профессор, заведующий кафедры прикладной и высшей математики Черноморского государственного университета имени Петра Могилы, Николаев, Украина

<sup>3</sup>Д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры высшей математики и математического моделирования Херсонского национального технического университета, Херсон, Украина

## ПОСТРОЕНИЕ БАЗИСА БИПИРАМИДЫ

В статье бипирамида впервые рассматривается как 6-узловой конечный элемент (КЭ). Для построения ее биквадратичного базиса используются два разных подхода: матричный способ и метод внутренней конденсации базиса бипирамиды как 7-узлового лагранжевого КЭ. Первый подход позволяет исследовать принципиально возможное количество базисов КЭ, а второй такой возможности не предоставляет, но является более экономичным. Показано, что после удовлетворения традиционных требований к базисным функциям в МКЭ в биквадратичных базисных функциях бипирамиды как 6-узлового КЭ, которые строятся с помощью названных ранее подходов, остается разное количество неопределенных коэффициентов. Эти коэффициенты далее используются для придания базисным функциям специальных свойств, адаптирующих их к решению граничных задач с уравнением Лапласа. В качестве критерия прогностического оценивания аппроксимационных свойств КЭ в форме бипирамиды выбрана величина следа матрицы жесткости. Минимизация следа матрицы жесткости приводит к построению одного и того же биквадратичного базиса бипирамиды при обоих подходах.

На основе полученного базиса анализируются границы допустимых деформаций геометрической формы бипирамиды. Впервые теоретически доказано, что существует КЭ, при использовании которого в качестве ячейки конечно-элементной сетки, наилучшая точность достигается при отклонении геометрической формы КЭ от правильного многогранника, в данном случае от октаэдра. Найдено критическое значение коэффициента сжатия, которое обеспечивает достижение минимума следа матрицы жесткости для бипирамиды исследуемой геометрической формы.

Проведен вычислительный эксперимент, результаты которого подтверждают теоретический прогноз свойств бипирамиды как КЭ. Установленные закономерности позволяют предполагать целесообразность применения базисов более высокого порядка для КЭ в форме бипирамиды.

**Ключевые слова:** метод конечных элементов, бипирамида, след матрицы жесткости, тетраэдрально-октаэдральная решетка.

Motaillo A. P.<sup>1</sup>, Khomchenko A. N.<sup>2</sup>, Tuluchenko G. Ya.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Senior Lecturer in Chair of Higher Mathematics and Mathematical Modeling, Kherson National Technical University, Kherson, Ukraine

<sup>2</sup>Dr. Sc., Professor, Head of Chair, Applied and Higher Mathematics, Petro Mohyla Black Sea State University, Mykolayiv, Ukraine

<sup>3</sup>Dr. Sc., Professor, Professor of Chair of Higher Mathematics and Mathematical Modeling, Kherson National Technical University, Kherson, Ukraine

## THE CONSTRUCTING OF BIPYRAMID'S BASIS

The bipyramid for the first time is considered as a 6-knots finite element (FE) in the article. For the construction of her biquadratic base two different approaches are used: matrix method and internal condensation method for the bipyramid's base as a 7-knots Lagrange FE. The first approach allows to investigate the fundamentally possible amount of bases for FE, and second approach does not give such possibility, but it is more economical. It is shown that after satisfaction of the traditional requirements to the basic functions in FEM in the biquadratic basic functions of bipyramid as a 6-knots FE, which are built by means of the named before approaches, there are a different amount of the indefinite coefficients. These coefficients are used future for the giving of the special properties to the basic functions, which adapt them to the solving of a boundary problems with Laplace's equation. The value of trace of stiffness matrix is chosen as a criterion for the prognostic evaluation of approximation properties of FE in bipyramid's form. The minimization of the trace value of the stiffness matrix results in the construction of the same biquadratic base of the bipyramid at the both approaches.

On the basis of the got base the borders of the possible deformations of the bipyramid's geometrical form are analysed. It is first well-proven in theory, that FE exists, at using of that as a cell of finite-element mesh, the best accuracy is arrived at the deviation of FE geometrical form from a regular polyhedron, in this case from an octahedron. The critical value of the aspect ratio which provides the achievement of a minimum of trace of stiffness matrix for the bipyramid of the studied geometrical form is found.

A calculable experiment the results of that confirm the theoretical prognosis for properties of bipyramid as FE is conducted. The found regularities allow to suppose the expediency of application of bases with higher-order for FE in form bipyramid.

**Keywords:** finite element method, bipyramid, trace of stiffness matrix, tetrahedral-octahedral mesh.

## REFERENCES

- Krashanitsa Yu. A., Bahyr A. V., Taranenko V. A., Mashchenko Yu. S. Construction Algorithm of the Three-Dimensional Adapted Mesh for the Tasks of Aerodynamics by Finite Elements Method, *Open Information and Computer Integrated Technologies*, 2014, No. 66, pp. 105–110.
- Greiner G., Grosso R. Hierarchical tetrahedral-octahedral subdivision for volume visualization, *The Visual Computer*, 2000, I. 16, pp. 357–369.
- de Bruijn H. Numerical Method for 3D Ideal Flow [Electronic resource]. Han de Bruijn Access mode: <http://hdebruijn.soo.dto.tudelft.nl/jaar2010/octaeder.pdf>.
- Motaillo A. P. Bases of a 6-knots octahedron [Electronic resource], *Proceedings of the International Scientific-Practical Conference «Future Scientific Researches – 2011»*. Series: *Mathematics Applied Mathematics* (2011 February, 17–25). Sofia, Bulgaria. Access mode: [http://www.rusnauka.com/Page\\_ru.htm](http://www.rusnauka.com/Page_ru.htm).
- Segerlind L. Application of Finite Elements Method. Moscow, World, 1979, 392 p.
- Shopov P. I. Condensation Method for Mechanics Problems of Compressible Fluids, *Serdica: Bulgarian Mathematical Journal*, 1984, Vol. 10, pp. 198–205.
- Zienkiewicz O. Finite Elements Method in Technique. Moscow, World, 1975, 541 p.
- Sekulovich M. Finite Elements Method. Moscow, Stroyizdat, 1993, 664 p.
- Checking the Skewness ANSYS Icepak 12.1: User's Guide [Electronic resource]. Access data: <http://orange.engr.ucdavis.edu/Documentation12.1/121/ICEPAK/iceug.pdf>
- ANSYS Fluent. [Electronic resource]. Access data: <https://www.sharcnet.ca/Software/Fluent6/html/udf/node1.htm>
- Nesis E. I. Methods of Mathematical Physics. Moscow, Enlightenment, 1977, 199 p.
- Motaillo A. P. About the Numeral Solution of Stationary Task of Heat Conductivity by the Finite Element Method on the Mesh with Tetrahedral-Octahedral Structure, *Scientific lists of BelSU. Mathematics. Physics*, 2014, No. 25 (196), I. 37. Belgorod: «NRU BelSU», 2014, pp. 119–127.

УДК.621.3.048.1: 004.93

Скрупская Л. С.

Старший преподаватель кафедры электрических и электронных аппаратов, Запорожский национальный технический университет, Запорожье, Украина

## РЕАЛИЗАЦИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ ПРОЦЕССА ДИАГНОСТИРОВАНИЯ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СОСТОЯНИЯ ИЗОЛЯЦИИ ТРАНСФОРМАТОРОВ ТОКА

В статье решена задача разработки Unified Modeling Language-моделей вариантов использования, классов, деятельности, состояния и последовательности взаимодействия компонентов для диагностирования состояния изоляции трансформаторов тока. Цель работы заключается в повышении эффективности диагностирования и прогнозирования состояния основной изоляции трансформаторов тока с применением современных программных средств. Объект исследования – процесс диагностирования состояния основной изоляции трансформаторов тока. Предметом исследования являются нейросетевые модели, при помощи которых выполняется прогнозирование состояния основной изоляции. Новизна работы заключается в том, что разработанные информационные модели позволяют реализовать нейросетевые модели диагностирования и прогнозирования состояния основной изоляции трансформаторов тока независимо от выбранного языка программирования. Выполнены эксперименты, подтверждающие адекватность предложенных моделей. Практическая ценность работы заключается в том, что при помощи предложенных UML-моделей разработано программное обеспечение, которое позволяет диагностировать и прогнозировать состояние основной изоляции трансформаторов тока.

**Ключевые слова:** UML, диагностирование, прогнозирование, изоляция, трансформатор тока.

### НОМЕНКЛАТУРА

- $x_1$  – тангенс угла диэлектрических потерь основной изоляции под рабочим напряжением;  
 $x_2$  – отклонение емкости основной изоляции от паспортного значения;  
 $x_3$  – влажность воздуха окружающей среды;  
 $x_4$  – температура воздуха окружающей среды;  
 $x_5$  – интенсивность частичных разрядов;  
 $Y$  – состояние изоляции трансформатора тока.

### ВВЕДЕНИЕ

Для выявления тенденций к неисправностям, возникающим в электрических аппаратах, и их своевременного устранения широко применяется метод математического моделирования [1–3]. В модель подставляются входные характеристики, а на выходе получаем результат в диапазоне от нуля до единицы, свидетельствующий о вероятности безотказной работы. В частности, математические модели успешно используются для диагностирования состояния изоляции трансформаторов тока [4, 5]. Применение таких моделей существенно продлевает срок службы изделий, потому что позволяет превентивно вывести изделие в резерв для осуществления ремонта.

Работа с такими математическими моделями на практике затруднена ограничениями их программной имплементации, например, спецификой конкретного языка программирования, примененного для реализации той или иной модели. Кроме того, реализация математической модели на конкретном языке накладывает ограничения на аппаратную платформу, на которой она будет выполняться. Поэтому актуально и важно разработать информационные модели диагностирования и прогнозирования состояния изоляции трансформаторов тока с применением аппарата UML-моделирования [6], что позволит реализовать эти модели на любом языке программирования под любую аппаратную и программную платформу.

Целью данной работы является повышение эффективности диагностирования и прогнозирования состояния основной изоляции трансформаторов тока с применением современных программных средств.

### 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для практического применения нейросетевых моделей (1) и (2) диагностирования и прогнозирования состояния основной изоляции трансформаторов тока необходима их программная реализация. Однако, выбор любого отдельно взятого языка программирования налагает определенные ограничения на такую реализацию. Поэтому в данной работе ставится задача разработать информационные UML-модели, позволяющие на концептуальном уровне описать варианты использования, классы, деятельность, состояния и последовательность взаимодействия компонентов, в результате чего можно будет программно реализовать модели (1) и (2) без привязки к конкретному языку программирования и без ограничений в аппаратной платформе.

### 2 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Рассмотрим математические модели диагностирования и прогнозирования состояния изоляции трансформаторов тока, предложенные в работах [4, 5]. В работе [4] найдена нелинейная зависимость между параметрами основной изоляции: тангенсом угла диэлектрических потерь основной изоляции под рабочим напряжением, отклонением емкости основной изоляции от паспортного значения, влажностью и температурой воздуха окружающей среды. Модель позволяет диагностировать состояние изоляции трансформатора тока ( $Y$ ), которое может быть строго «0», означающим высокую вероятность отказа или строго «1», свидетельствующим о высокой вероятности безотказной работы:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{NN} = \Psi_{(3,1)} = \left( 1 + e^{-(-547,979+772,39\Psi_{(2,1)}+659,629\Psi_{(2,2)})} \right)^{-1}; \\ \Psi_{(2,1)} = \left( 1 + e^{-(1,145-8,493\Psi_{(1,1)}-529,631\Psi_{(1,2)}+9,555\Psi_{(1,3)}-8,287\Psi_{(1,4)})} \right)^{-1}; \\ \Psi_{(2,2)} = \left( 1 + e^{-(1,095+69,829\Psi_{(1,1)}+11,735\Psi_{(1,2)}-69,994\Psi_{(1,3)}+69,967\Psi_{(1,4)})} \right)^{-1}; \\ \Psi_{(1,1)} = \left( 1 + e^{-(30,161-1,76x_1-99,142x_2+7,413x_3+13,707x_4)} \right)^{-1}; \\ \Psi_{(1,2)} = \left( 1 + e^{-(36,203+7,8x_1+0,667x_2+0,852x_3+39,674x_4)} \right)^{-1}; \\ \Psi_{(1,3)} = \left( 1 + e^{-(168,607+59,402x_1-227,376x_2-81,146x_3-10,997x_4)} \right)^{-1}; \\ \Psi_{(1,4)} = \left( 1 + e^{-(30,194-46,056x_1+44,165x_2-15,499x_3-35,356x_4)} \right)^{-1}. \end{array} \right. \quad (1)$$

Работа [5] посвящена прогнозированию состояния изоляции трансформаторов тока. Она связывает в нелинейную зависимость тангенс угла диэлектрических потерь основной изоляции под рабочим напряжением, отклонение емкости основной изоляции от паспортного значения, влажность и температуру воздуха окружающей среды, интенсивность частичных разрядов. Эта модель позволяет спрогнозировать состояние изоляции трансформатора тока в диапазоне от «0», означающего достоверный отказ, до «1», достоверно свидетельствующей о безотказной работе:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{NN} = \Psi_{(3,1)} = \left( 1 + e^{(-7,4784+2,9078\Psi_{(2,1)}+0,404\Psi_{(2,2)}+5,0228\Psi_{(2,3)}+5,3002\Psi_{(2,4)})} \right)^{-1}; \\ \Psi_{(2,1)} = \left( 1 + e^{-(6,1359-2,5979\Psi_{(1,1)}+2,7649\Psi_{(1,2)}-3,3634\Psi_{(1,3)}+4,7321\Psi_{(1,4)}+0,2641\Psi_{(1,5)}-0,1888\Psi_{(1,6)}-5,3388\Psi_{(1,7)})} \right)^{-1}; \\ \Psi_{(2,2)} = \left( 1 + e^{-(1,0461-1,7837\Psi_{(1,1)}+4,4856\Psi_{(1,2)}+2,7141\Psi_{(1,3)}-2,6650\Psi_{(1,4)}+2,8964\Psi_{(1,5)}-1,2898\Psi_{(1,6)}+1,7281\Psi_{(1,7)})} \right)^{-1}; \\ \Psi_{(2,3)} = \left( 1 + e^{-(3,882-2,0637\Psi_{(1,1)}-1,0753\Psi_{(1,2)}+2,4708\Psi_{(1,3)}+1,8698\Psi_{(1,4)}+4,9156\Psi_{(1,5)}+3,5897\Psi_{(1,6)}+3,6233\Psi_{(1,7)})} \right)^{-1}; \\ \Psi_{(2,4)} = \left( 1 + e^{(-0,8951-0,0594\Psi_{(1,1)}+2,9819\Psi_{(1,2)}-2,3583\Psi_{(1,3)}-0,8607\Psi_{(1,4)}+5,0139\Psi_{(1,5)}-1,5493\Psi_{(1,6)}-1,7566\Psi_{(1,7)})} \right)^{-1}; \\ \Psi_{(1,1)} = \left( 1 + e^{-(10,3266+0,6509x_1-0,6431x_2+2,0358x_3+1,7211x_4+7,0363x_5)} \right)^{-1}; \\ \Psi_{(1,2)} = \left( 1 + e^{-(1,4743+1,8947x_1+7,1942x_2-3,2972x_3-0,5464x_4+4,7834x_5)} \right)^{-1}; \\ \Psi_{(1,3)} = \left( 1 + e^{-(0,6412-5,9152x_1+3,1312x_2-2,4422x_3+3,5875x_4+6,2612x_5)} \right)^{-1}; \\ \Psi_{(1,4)} = \left( 1 + e^{-(5,3739-1,2143x_1-4,6796x_2-4,9762x_3-11,5101x_4+0,4317x_5)} \right)^{-1}; \\ \Psi_{(1,5)} = \left( 1 + e^{-(1,3765-6,3586x_1-10,9655x_2-1,7367x_3-5,8159x_4-3,6925x_5)} \right)^{-1}; \\ \Psi_{(1,6)} = \left( 1 + e^{(-2,6918-0,8681x_1+6,4870x_2-4,7637x_3-2,4065x_4-1,6228x_5)} \right)^{-1}; \\ \Psi_{(1,7)} = \left( 1 + e^{-(1,5774+1,4648x_1-4,3641x_2+0,6580x_3+8,5722x_4+0,8051x_5)} \right)^{-1}. \end{array} \right. \quad (2)$$

### 3 МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Диаграмма вариантов использования (рис. 1) позволяет ограничить круг задач, решаемых при помощи реализуемых моделей. Пользователь должен иметь возможность взаимодействовать с интерфейсом моделей: вводить основные параметры изоляции и получать заключение о вероятности безотказной работы, если речь идет о модели (1), или прогноз по такой вероятности (2). При этом до расчетов по формулам (1) и (2) должна выполняться проверка корректности введенных параметров.

Диаграмма классов описывает объекты, необходимые для программной реализации математических моделей независимо от конкретного языка программирования. Основными классами для рассматриваемых моделей являются «Insulation», описывающий параметры изоляции, «Diagnostics», содержащий метод диагностирования или прогнозирования состояния изоляции, и

«View», описывающий графический интерфейс пользователя (рис. 2). Класс «Diagnostics» агрегирует экземпляр класса «Insulation», потому что использует параметры изоляции в методе диагностирования. Метод «returnState» выполняет диагностирование или прогнозирование вероятности безотказной работы изоляции трансформатора тока по формулам (1) или (2).

Диаграмма деятельности позволяет описать на концептуальном уровне алгоритм деятельности реализации рассматриваемых моделей (рис. 3). После ввода параметров изоляции в интерфейс программы, необходимо выполнить их нормирование к шкале от нуля до единицы, поскольку модели (1) и (2) учитывают уже нормированные параметры. Далее выполняется передача параметров в модель, при этом выполняется инициализация объектов классов «Insulation» и «Diagnostics» (см. рис. 2). Затем при помощи методов класса «Diagnostics» осу-

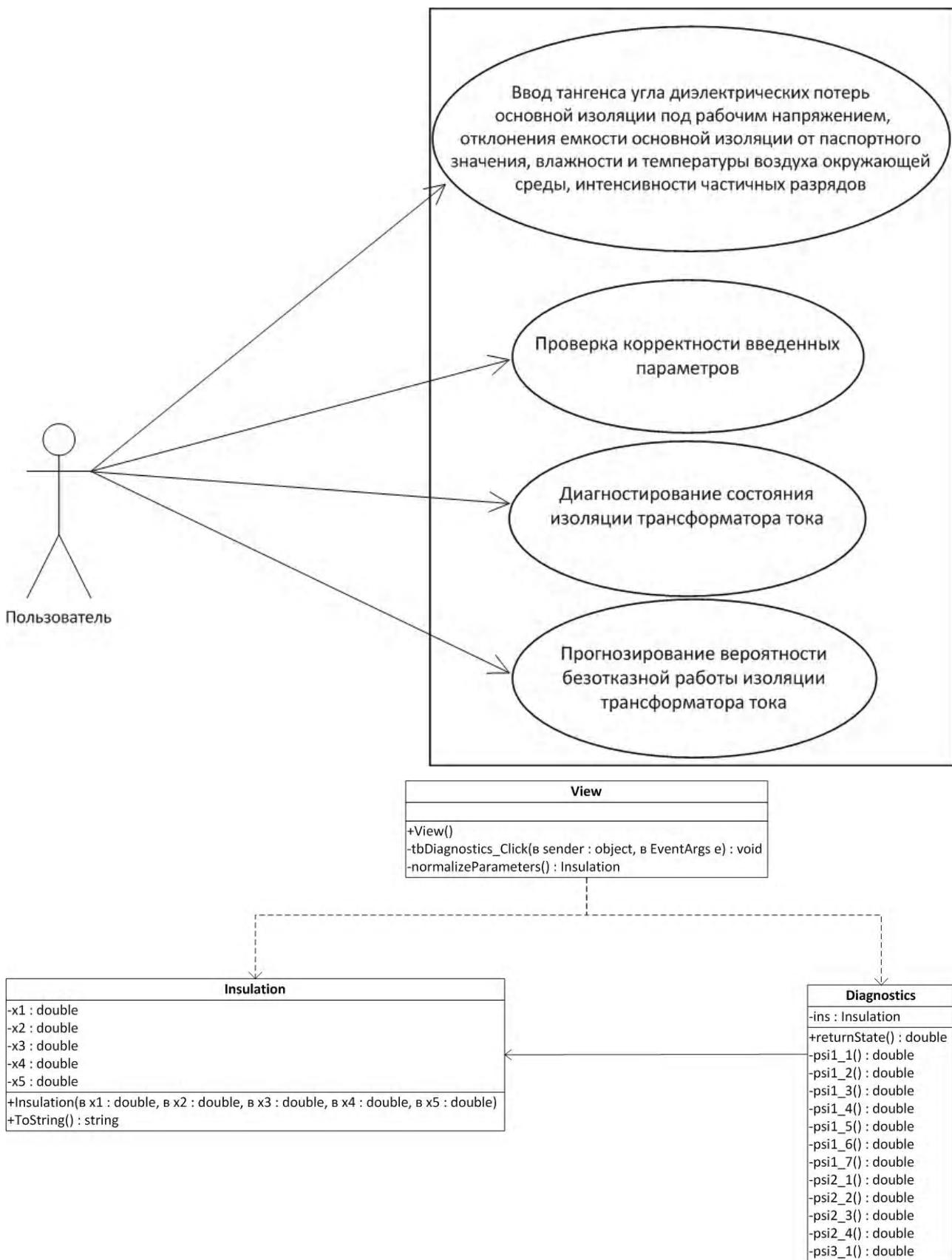


Рисунок 2 – Диаграмма класів, необхідних для реалізації розглядуемых моделей

ществляется расчет каждого слоя модели при помощи функции активации и весовых коэффициентов по формулам (1) и (2). Далее формируется прогноз относитель-

но вероятности безотказной работы изоляции трансформатора тока. Вывод в интерфейс осуществляется при помощи методов класса «View».

Диаграмма состояний позволяет описать состояния, в которых может находиться программа в процессе имплементации модели (рис. 4). В состоянии «Создание графического интерфейса» программа вызывает конструктор класса «View» (см. рис. 2), который строит интерфейс системы. Затем выполняется ожидание ввода параметров изоляции. Если параметры находятся в рабо-

чем диапазоне, по которому были построены модели (1) и (2), программа нормирует параметры в конструкторе класса «Insulation» и переходит к расчету первого слоя модели: создается объект класса «Diagnostics», в котором вызываются соответствующие методы. При корректирующем расчете первого слоя, выполняется расчет второго, а затем и третьего слоев. После формирования ре-

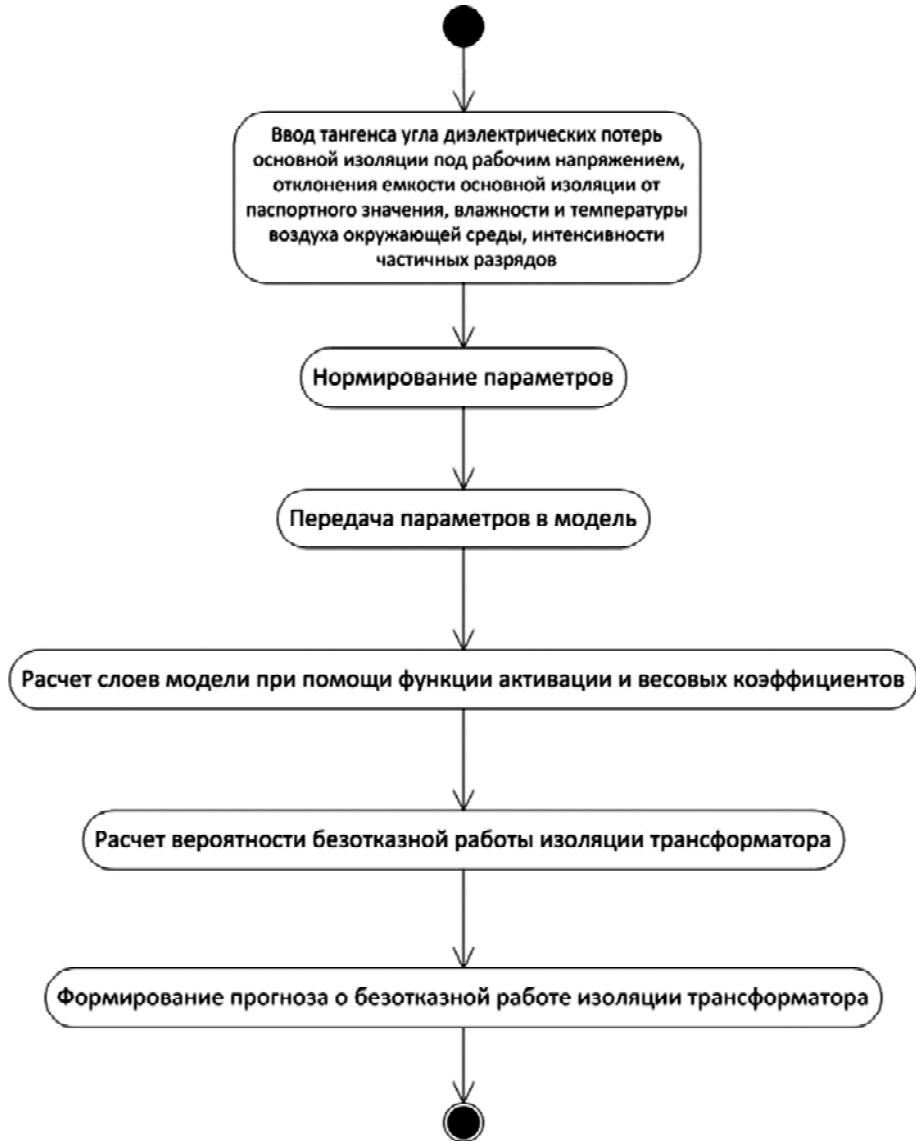


Рисунок 3 – Диаграмма деятельности реализации рассматриваемых моделей

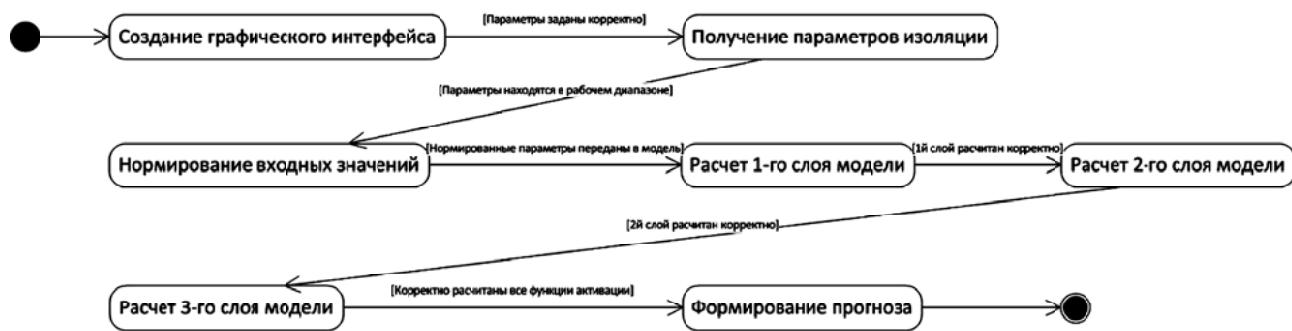


Рисунок 4 – Диаграмма состояний рассматриваемых моделей

зультата проверяется его корректность (принадлежность диапазону вероятности от нуля до единицы) и при помощи объекта класса «View», программа переходит в состояние отображения результатов прогнозирования на дисплей.

Диаграмма последовательности описывает последовательность взаимодействия компонентов программы, реализующей рассматриваемые модели (рис. 5). Класс «View» инициализирует работу программы. После ввода параметров и их нормирования, создается экземпляр класса «Insulation», в конструктор которого передаются нормированные параметры. Экземпляр «Insulation» передается в класс «Diagnostics», в котором выполняется основной расчет моделей (1) и (2) по запросу, приходящему от класса «View». Результат возвращается в класс «View» для отображения на экран. На диаграмме крестики означают завершение жизненного цикла объекта соответствующего класса. При этом экземпляр класса «View» не уничтожается до тех пор, пока программа существует в памяти, что позволяет пользователю за один сеанс работы выполнить неоднократное прогнозирование состояния изоляции трансформатора тока с различными входными параметрами.

События в модели происходят синхронно, то есть, пока не возвращено управление из метода одного класса, метод другого класса не может получить управление. Например, невозможно рассчитать второй слой модели, пока не получены значения всех функций активации с первого слоя.

#### 4 ЭКСПЕРИМЕНТЫ

На основе предложенных информационных моделей можно выполнить программную реализацию диагностирования и прогнозирования состояния изоляции трансформаторов тока на любом языке программирования. В данной работе использован язык C# Windows Forms. Для выполнения экспериментального исследования раз-

работанного программного обеспечения использована компьютерная система Запорожского национального технического университета: процессоры Intel E3200, оперативная память 1 ГБ DDR-2 на каждый узел, коммуникационная среда Gigabit Ethernet 1 Гб/с.

#### 5 РЕЗУЛЬТАТЫ

Главное окно приложения, реализующего модель диагностирования основной изоляции трансформаторов тока на основе модели (1), приведено на рис. 6. Аналогичным образом была реализована модель (2) прогнозирования состояния изоляции трансформатора тока. Интерфейс приложения показан на рис. 7.

#### 6 ОБСУЖДЕНИЕ

Тестовая выборка для экспериментальной проверки разработанного программного обеспечения на основе предложенных информационных моделей состояла из результатов тридцати восьми экспериментов и включала экземпляры изоляции трансформаторов тока, не входящие в обучающую для моделей (1) и (2) выборку. Так было обеспечено диагностирование и прогнозирование состояния изоляции, а не просто распознавание по обучающей выборке.

В разработанное программное обеспечение были введены характеристики изоляции трансформатора тока. В результате в режиме диагностирования были получены значения «0» или «1», а в режиме прогнозирования – от «0» до «1». Результат можно трактовать как вероятность безотказной работы основной изоляции трансформатора тока при заданных ее характеристиках.

Полученные результаты были сравнены с результатами в тестовой выборке. При этом среднеквадратичная ошибка составила  $63,12 \times 10^{-5}$ , что является приемлемым значением, свидетельствующим о возможности применения предложенных информационных моделей и программного обеспечения на практике.

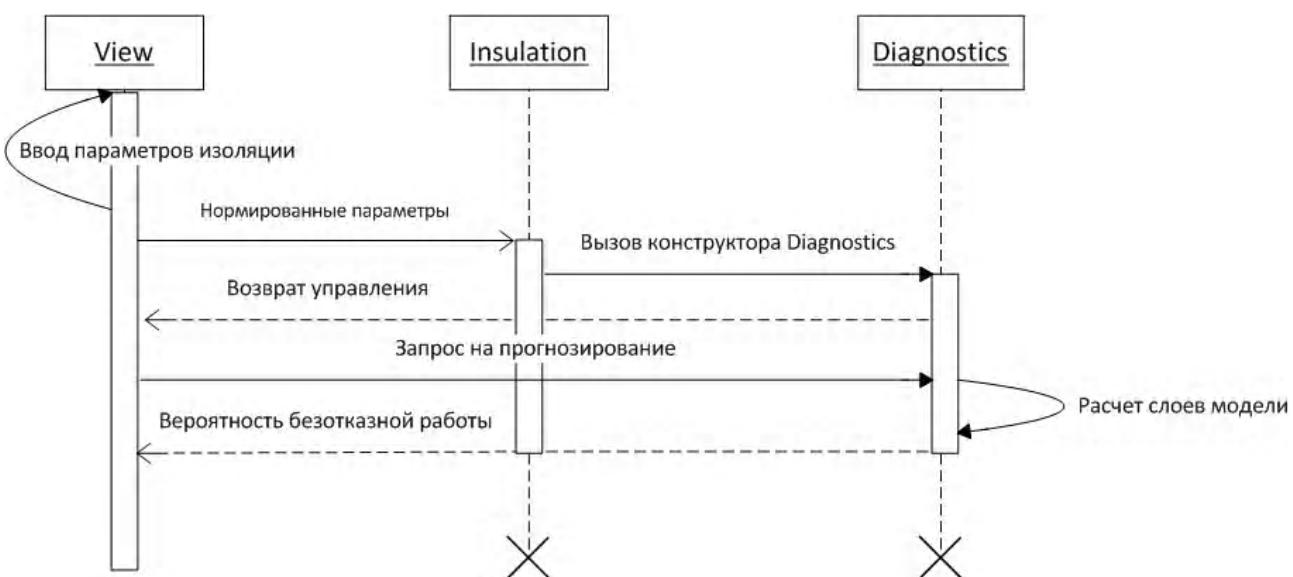


Рисунок 5 – Диаграмма последовательности взаимодействия компонентов моделей

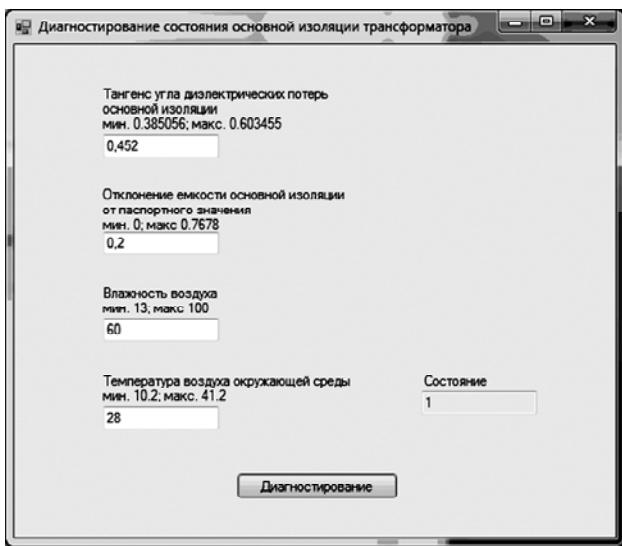


Рисунок 6 – Приложение для диагностирования основной изоляции трансформатора тока на основе модели (1)

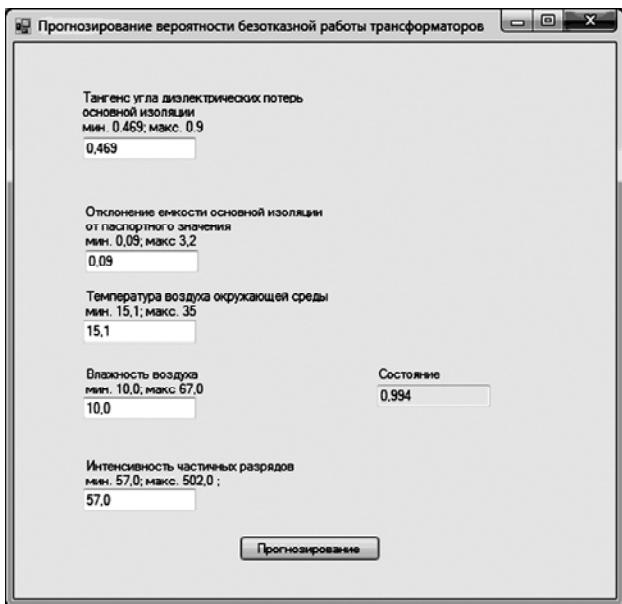


Рисунок 7 – Приложение для диагностирования основной изоляции трансформатора тока на основе модели (2)

## ВЫВОДЫ

В работе решена актуальная задача разработки информационных UML-моделей, позволяющих на концептуальном уровне описать варианты использования, классы, деятельность, состояния и последовательность взаимодействия компонентов. Научная новизна работы заключается в том, что разработаны UML-модели, позволяющие программно реализовать модели диагностирования (1) и прогнозирования (2) состояния основной изоляции трансформаторов тока без привязки к конкретному языку программирования и без ограничений в аппаратной платформе. Практическая ценность работы: при помощи предложенных UML-моделей разработано программное обеспечение, реализующее диагностирование и прогнозирование состояния изоляции трансформаторов тока.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Выборка для проведения экспериментального исследования предложенных информационных моделей представлена компанией «Энергоавтоматизация» (г. Запорожье).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Гук Ю. Б. Теория надежности в электроэнергетике : учеб. пособие для вузов / Ю. Б. Гук. – Л. : Энергоатомиздат, 1990. – 208 с.
- Фокин Ю. А. Оценка надежности систем энергоснабжения / Ю. А. Фокин, В. А. Туфанов. – М. : Энергоатомиздат, 1981. – 224 с.
- Banjevic D. Remaining useful life in condition based maintenance: Is it useful?: Modelling in Industrial Maintenance and Reliability : 6th IMA International Conference MIMAR2007, 10–11 Sept. 2007 : proceedings / D. Banjevic, A. K. S. Jardine. – Manchester, United Kingdom. – 2007. – P. 7–12.
- Скрупская Л. С. Построение моделей диагностирования состояния бумажно-масляной изоляции измерительных трансформаторов тока / Л. С. Скрупская, А. А. Олейник, А. А. Сахно // Електротехніка і електромеханіка. – 2014. – № 2. – С. 48–51.
- Скрупская Л. С. Модель прогнозирования на основе интенсивности частичных разрядов вероятности безотказной работы бумажно-масляной изоляции измерительных трансформаторов тока / Л. С. Скрупская, М. А. Поляков // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – 2015. – № 2 (91). – С. 9–14
- Ларман К. Применение UML 2.0 и шаблонов проектирования : 3-е изд. / Л. Крэг. – Вильямс, 2013. – 736 с.

Статья поступила в редакцию 17.05.2016.

После доработки 30.05.2016.

Скрупська Л. С.

Старший викладач кафедри електрических та електронних апаратів, Запорізький національний технічний університет, Запоріжжя, Україна

## РЕАЛІЗАЦІЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ ПРОЦЕСУ ДІАГНОСТУВАННЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ СТАНУ ІЗОЛЯЦІЇ ТРАНСФОРМАТОРІВ СТРУМУ

Вирішено завдання розробки Unified Modeling Language-моделей варіантів використання, класів, діяльності, стану і послідовності взаємодії компонентів для діагностування стану ізоляції трансформаторів струму. Мета роботи полягає у підвищенні ефективності діагностування та прогнозування стану основної ізоляції трансформаторів струму з використанням сучасних програмних засобів. Об'єкт дослідження – процес діагностування стану основної ізоляції трансформаторів струму. Предметом дослідження є нейромережеві моделі, за допомогою яких виконується прогнозування стану основної ізоляції. Новизна роботи полягає у тому, що розроблені інформаційні моделі дозволяють реалізувати нейромережеві моделі діагностування та прогнозування стану основної ізоляції трансформаторів струму незалежно від обраної мови програмування. Виконано експерименти, що підтверджують адекватність запропонованих моделей. Практична цінність роботи полягає у тому, що за допомогою запропонованих UML-моделей розроблено програмне забезпечення, що дозволяє діагностувати та прогнозувати стан основної ізоляції трансформаторів струму.

**Ключові слова:** UML, діагностування, прогнозування, ізоляція, трансформатор струму.

Skrupskaya L. S.

Senior lecturer of Electric and Electronic Department, Zaporizhzhya National Technical University, Zaporizhzhya, Ukraine

## IMPLEMENTATION OF INFORMATION MODELS OF DIAGNOSING AND PREDICTION OF CURRENT TRANSFORMER INSULATION STATE

The article deals with the problem of the development of the Unified Modeling Language-models such as use cases, classes, activities, conditions and sequences of interaction of components to diagnose the state of current transformers insulation. The purpose of the work is to improve the efficiency of diagnosing and prediction of current transformers primary insulation state using modern software. The object of research is the process of diagnosing of current transformers primary insulation state. The subject of research is the neural network models, by which the prediction of the insulation state is performed. The novelty lies in the fact that the developed information models allow realizing the neural network models of diagnosing and prediction of current transformer insulation state independently of the selected programming language. Experiments confirming the adequacy of the proposed model have been executed. The practical value of the work consists in the fact that by using the proposed UML-models the software that allows diagnosing and prediction of current transformer insulation state is developed.

**Keywords:** UML, diagnosing, prediction, insulation, current transformer.

## REFERENCES

1. Guk Yu. B. Teoriya nadezhnosti v e'lektroenergetike: Ucheb. posobie dlya vuzov. Leningrad, E'nergoatomizdat, 1990, 208 p.
2. Fokin Yu. A., Tufanov V. A. Ocenka nadezhnosti sistem e'nergosabzheniya. Moscow, E'nergoatomizdat, 1981, 224 p.
3. Banjevic D., Jardine A. K. S. Remaining useful life in condition based maintenance: Is it useful?: Modelling in Industrial Maintenance and Reliability. Proceedings of MIMAR2007 : the 6th IMA International Conference, (10–11 Sept. 2007). Manchester, United Kingdom, 2007, pp. 7–12.
4. Skrupskaya L. S., Olejnik A. A., Saxno A. A. Postroenie modeley diagnostirovaniya sostoyaniya bumazhno-maslyanoj izolyacii izmeritel'nyx transformatorov toka, *Elektrotexnika i Elektromekhanika*, 2014, No. 2, pp. 48–51.
5. Skrupskaya L. S., Polyakov M. A. Model' prognozirovaniya na osnove intensivnosti chastichnyx razryadov veroyatnosti bezotkaznoj raboty bumazhno-maslyanoj izolyacii izmeritel'nyx transformatorov toka, *Visnik Kremenchuc'kogo nacional'nogo universitetu imeni Mixajla Ostrograds'kogo*, 2015, No. 2 (91), pp. 9–14.
6. Larman Kre'g Primenenie UML 2.0 i shablonov proektirovaniya. 3-e izd. Vil'yams, 2013, 736 p.

УДК 621.52+511.52

Симонян С. О.<sup>1</sup>, Айвазян А. А.<sup>2</sup><sup>1</sup>Д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой информационных технологий и автоматизации Национального политехнического университета Армении, Ереван, Армения<sup>2</sup>Старший техник базовой научно-исследовательской лаборатории системного анализа кафедры информационных технологий и автоматизации Национального политехнического университета Армении, Армения

## К РЕШЕНИЮ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА $A(T) \cdot X(T) + X^*(T) \cdot B(T) = C(T)$

Рассмотрены однопараметрические сопряженные аналоги матричных уравнений типа Сильвестра. На основе несложных преобразований получено эквивалентное матричное уравнение, содержащее только неизвестную матрицу, подлежащую определению. Далее, использованием аппарата кронекеровых произведений матриц, получено аналитическое решение задачи, ограниченное в практических применениях, однако служащее основой для разработки численно-аналитических методов решения исходной задачи. Предложены последовательный и параллельный численно-аналитические методы решения, основанные на дифференциальных преобразованиях Г. Е. Пухова. При последовательном численно-аналитическом методе оперируем числовыми рекуррентными процедурами на первом этапе вычислений и аналитическими соотношениями – на втором этапе. При параллельном численно-аналитическом методе оперируем линейной гиперсистемой числовых уравнений на первом этапе вычислений и аналитическими соотношениями – на втором этапе. При всех методах получены соответствующие условия однозначной разрешимости задачи. Рассмотрен модельный пример, для которого при использовании численно-аналитических методов получено точное тейлоровское решение. Предложенные численно-аналитические методы могут быть эффективно реализованы средствами современных информационных технологий.

**Ключевые слова:** однопараметрический сопряженный аналог матричного уравнения типа Сильвестра, редукция задачи, аналитический метод решения, дифференциальные преобразования, последовательный и параллельный численно-аналитические методы, модельный пример, условия однозначной разрешимости задачи.

### НОМЕНКЛАТУРА

- $A$  – числовая матрица порядка  $m$ ;
- $B$  – числовая матрица порядка  $m$ ;
- $C$  – числовая матрица порядка  $m$ ;
- $X$  – неизвестная числовая матрица порядка  $m$ , подлежащая определению;
- $*$  – знак эрмитова сопряжения матриц;
- $T$  – знак транспонирования матриц;
- $-1$  – знак обращения матриц;
- $X^*$  – неизвестная числовая матрица порядка  $m$ ;
- $t$  – независимая переменная (параметр, в частности – время);
- $t_i$  – изолированные значения независимой переменной;
- $A(t)$  – однопараметрическая матрица порядка  $m$ ;
- $B(t)$  – однопараметрическая матрица порядка  $m$ ;
- $C(t)$  – однопараметрическая матрица порядка  $m$ ;
- $X(t)$  – неизвестная однопараметрическая матрица порядка  $m$ , подлежащая определению;
- $A^*(t)$  – однопараметрическая сопряженная матрица порядка  $m$ ;
- $B^*(t)$  – однопараметрическая сопряженная матрица порядка  $m$ ;
- $C^*(t)$  – однопараметрическая сопряженная матрица порядка  $m$ ;
- $X^*(t)$  – однопараметрическая сопряженная матрица порядка  $m$ ;
- $A^{-1}(t)$  – однопараметрическая обратная матрица порядка  $m$ ;
- $B^{-1}(t)$  – однопараметрическая обратная матрица порядка  $m$ ;
- $B^{-T}(t)$  – однопараметрическая обратно-транспонированная матрица порядка  $m$ ;

$A^{-*}(t)$  – однопараметрическая обратно-сопряженная матрица порядка  $m$ ;

$A^{-*T}(t)$  – однопараметрическая обратно-сопряженно-транспонированная матрица порядка  $m$ ;

$\hat{X}(t)$  – неизвестный однопараметрический гипервектор с размерами  $m^2 \times 1$ , порожденный матрицей  $X(t)$  при обходе ее по строкам и подлежащий определению;

$\hat{D}_1(t)$  – однопараметрический гипервектор с размерами  $m^2 \times 1$ , порожденный матрицей  $D_1(t)$  при обходе ее по строкам;

$\rightarrow$  – знак перехода из области оригиналов в область дифференциальных изображений и наоборот;

$\otimes$  – знак кронекеровых произведений матриц;

$Rang$  – ранг матриц;

$\exists$  – квантор существования;

$\forall$  – квантор всеобщности;

$H$  – масштабный коэффициент;

$t_v$  – центр аппроксимации;

$\chi_i(\cdot), i = \overline{1, 11}$  – некоторые аппроксимирующие функции, восстанавливающие оригиналы;

$K = \overline{0, \infty}$  – целочисленный аргумент;

$A(K), K = \overline{0, \infty}$  – матричные дискреты порядка  $m$ ;

$B(K), K = \overline{0, \infty}$  – матричные дискреты порядка  $m$ ;

$C(K), K = \overline{0, \infty}$  – матричные дискреты порядка  $m$ ;

$A^{-1}(K), K = \overline{0, \infty}$  – матричные дискреты порядка  $m$ ;

$B^{-1}(K), K = \overline{0, \infty}$  – матричные дискреты порядка  $m$ ;

$B^*(K), K = \overline{0, \infty}$  – матричные дискреты порядка  $m$ ;

$C^*(K), K = \overline{0, \infty}$  – матричные дискреты порядка  $m$ ;

$\overset{*}{A}^{\vee}(K), K = \overline{0, \infty}$  – матричные дискреты порядка  $m$ ;  
 $\overset{*}{B}^{\vee}(K), K = \overline{0, \infty}$  – матричные дискреты порядка  $m$ ;  
 $\overset{*T}{A}^{\vee}(K), K = \overline{0, \infty}$  – матричные дискреты порядка  $m$ ;  
 $X(K), K = \overline{0, \infty}$  – матричные дискреты порядка  $m$ ;  
 $D(0,0)$  – числовая гиперматрица порядка  $m^2$ ;  
 $\hat{D}_l(K), K = \overline{0, \infty}$  – числовые гипервекторы с размерами  $m^2 \times 1$ ;  
 $\hat{X}(K), K = \overline{0, \infty}$  – числовые гипервекторы с размерами  $m^2 \times 1$ ;  
 $D(1,0;0,1)$  – числовая гиперматрица порядка  $m^2$ ;  
 $D(2,0;1,1;0,2)$  – числовая гиперматрица порядка  $m^2$ ;  
 $D(K,0;\dots;0,K)$  – числовая гиперматрица порядка  $m^2$ ;  
 $D(\bullet)$  – числовая гиперматрица порядка  $(K+1) \cdot m^2$ ;  
 $\hat{D}_l(\bullet)$  – числовой гипервектор с размерами  $(K+1) \cdot m^2 \times 1$ ;  
 $\hat{X}(\bullet)$  – числовой гипервектор с размерами  $(K+1) \cdot m^2 \times 1$ ;  
 $D_K(\bullet), K = \overline{0, \infty}$  – числовые гиперматрицы порядка  $m^2$ ;  
 $j$  – мнимая единица.

## ВВЕДЕНИЕ

Во многих теоретических и прикладных исследованиях (линейная алгебра, математическая статистика, математическое программирование, теория дифференциальных уравнений, теория оптимального управления, теория устойчивости и др.) достаточно часто встречаются линейные и нелинейные матричные алгебраические уравнения с заданными числовыми матрицами полного или неполного ранга, решение которых обычно связано со сложными вычислительными проблемами. Такими уравнениями являются, в частности, матричные уравнения Сильвестра, Стейна, Ляпунова, Риккати и др. В последнее время значительное внимание уделяется, так называемым, транспонированным и сопряженным аналогам отмеченных матричных уравнений, внешне похожих на них, однако глубоко различных по природе. Вопросы однозначной разрешимости таких алгебраических матричных уравнений, а также численные алгоритмы для их решения рассмотрены в многочисленных работах различных авторов. Что же касается однопараметрических (функциональных) матричных уравнений отмеченных типов, а также их транспонированным и сопряженным аналогам, то в области разработки методов для их решения наблюдается заметное отставание. Заполнение некоторого пробела в этой области и посвящена настоящая работа, в чем и, в первую очередь, заключается ее актуальность.

Объектом исследования настоящей работы является процесс построения методов для решения однопараметрических (функциональных) сопряженных аналогов матричных уравнений типа Сильвестра.

Предметом исследования составляют методы решения таких уравнений.

Целью работы является разработка аналитического метода решения сопряженного аналога непрерывного однопараметрического матричного уравнения типа Сильвестра, а также прямых последовательного и параллельного численно-аналитических методов, основанных на аналитическом методе и дифференциальных преобразованиях. Численно-аналитические методы позволяют широко использовать возможности средств современных информационных технологий с целью организации эффективных последовательных и параллельных вычислительных процедур при одноименных прямых методах.

## 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть имеется алгебраическое матричное уравнение Сильвестра [2–4] (в частности – Ляпунова [5, 6]):

$$A \cdot X + X \cdot B = C. \quad (1)$$

Транспонированным аналогом последнего является алгебраическое матричное уравнение типа Сильвестра [7–9, 13]:

$$A \cdot X + X^T \cdot B = C, \quad (2)$$

а сопряженным аналогом-алгебраическое матричное уравнение типа Сильвестра [7, 10–12, 14]:

$$A \cdot X + X^* \cdot B = C. \quad (3)$$

Однопараметрическими (функциональными) аналогами алгебраических матричных уравнений (1)–(3) являются соответственно матричные уравнения:

$$A(t) \cdot X(t) + X(t) \cdot B(t) = C(t), \quad (4)$$

$$A(t) \cdot X(t) + X^T(t) \cdot B(t) = C(t), \quad (5)$$

$$A(t) \cdot X(t) + X^*(t) \cdot B(t) = C(t), \quad (6)$$

Задача настоящего исследования заключается в необходимости разработки методов для решения однопараметрического сопряженного аналого-функционального матричного уравнения типа Сильвестра (6).

## 2 ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР

Для решения алгебраических матричных уравнений типа (1)–(3) в настоящее время разработан широкий набор различных методов [15–20]. Однако для решения однопараметрических матричных уравнений типа (4)–(6) такие методы малочисленны [21–26] или отсутствуют вовсе.

Общий подход к решению матричных уравнений (4)–(6) или им подобных заключается в использовании так называемого метода замороженных коэффициентов [27], при котором обычно выполняется следующая последовательность операций:

– решается некоторое, порожденное исходным функциональным матричным уравнением при фиксированных значениях  $t_i$  на рассматриваемом интервале множества однотипных по размерам и структуре, но отличных друг от друга по значениям элементов матриц алгебраических матричных уравнений с использованием какого-либо известного численного метода решения матричных уравнений, например [15–20];

– на основе полученных числовых решений строится аппроксимирующее искомое решение неизвестная матричная функция использованием какого-либо интерполяционного метода теории аппроксимации [28].

Однако очевидно, что такой подход обладает следующими весьма существенными недостатками:

- требует значительных затрат вычислительных ресурсов из-за необходимости решений многих однотипных матричных задач в изолированных точках  $t_i$ ;
- не задает длину и местоположение интервала изменения независимой переменной  $t$  на оси  $[0, \infty)$ ;
- не задает требуемое количество изолированных точек  $t_i$  на этом интервале с целью обеспечения необходимой точности решений  $X(t)$ ;
- не указывает на выбор равномерной или неравномерной сетки изолированных точек  $t_i$  на рассматриваемом интервале;
- не исключает проблему разветвления исходной задачи при выполнении условий неоднозначности решений рассматриваемых матричных уравнений и др.

В силу отмеченных недостатков метода замороженных коэффициентов и почти полного отсутствия методов решения однопараметрических (функциональных) задач типа (4)–(6) и, в частности, задачи (6), необходимо разработать специальные методы, обладающие характеристиками, обеспечивающими их эффективное использование при организации соответствующих вычислительных процедур.

### 3 МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

**Редукция и аналитическое решение задачи.** Допустим, что однопараметрические матрицы  $A(t)$  и  $B(t)$  не вырождены на рассматриваемом интервале параметра  $t$ . Тогда умножив уравнение (4) на  $A^{-1}(t)$ , получим:

$$X(t) = -A^{-1}(t) \cdot X^*(t) \cdot B(t) + A^{-1}(t) \cdot C(t),$$

откуда в соответствии с правилами матричного исчисления [1]:

$$X^*(t) = -B^*(t) \cdot X(t) \cdot A^{-*}(t) + C^*(t) \cdot A^{-*}(t). \quad (7)$$

С другой стороны, из (4) имеем:

$$X^*(t) = [C(t) - A(t) \cdot X(t)] \cdot B^{-1}(t). \quad (8)$$

Следовательно сопоставление (5) и (6) приводит к следующему:

$$C(t) \cdot B^{-1}(t) - A(t) \cdot X(t) \cdot B^{-1}(t) = C^*(t) \cdot A^{-*}(t) - B^*(t) \cdot X(t) \cdot A^{-*}(t),$$

откуда

$$A(t) \cdot X(t) \cdot B^{-1}(t) - B^*(t) \cdot X(t) \cdot A^{-*}(t) = C(t) \cdot B^{-1}(t) - C^*(t) \cdot A^{-*}(t). \quad (9)$$

Таким образом, после несложных преобразований получили эквивалентное (6) достаточно сложное матричное уравнение (9), в которой фигурирует только неизвестная матрица  $X(t)$  в отличие от (6), в котором фигурирует не только матрица  $X(t)$ , но и  $X^*(t)$ , намного усложняющая решение исходной задачи. Последнее обстоятельство и обуславливает глубоко различную природу уравнения (6) от уравнения (4).

Далее, применив аппарат кронекеровых произведений матриц [2] к линейному по отношению матрицы  $X(t)_{m \times m}$  матричному уравнению (9), получим линейную по отношению  $\hat{X}(t)_{m^2 \times 1}$  гиперматрично-гипервекторную систему уравнений:

$$\begin{aligned} & 0001 [A(t) \otimes B^{-T}(t) - B^*(t) \otimes A^{-*T}(t)]_{m^2 \times m^2} \times \\ & \times \hat{X}(t)_{m^2 \times 1} = C(t) \cdot B^{-1}(t) - C^*(t) \cdot A^{-*}(t) = \hat{D}_1(t), \end{aligned} \quad (10)$$

откуда аналитическое решение последней при выполнении условия гиперрегулярности:

$$\text{rang}[A(t) \otimes B^{-T}(t) - B^*(t) \otimes A^{-*T}(t)] = m^2 \quad (11)$$

будет выглядеть так:

$$\hat{X}(t) = [A(t) \otimes B^{-T}(t) - B^*(t) \otimes A^{-*T}(t)]^{-1} \cdot \hat{D}_1(t) = D(t) \cdot \hat{D}_1(t). \quad (12)$$

*Замечание 1.* Из (12) нетрудно получить условия однозначной разрешимости задачи (6), т.е. одновременное выполнение:

– условия гиперрегулярности (11), (13a)

– условия регулярности:

$$\text{rang}A(t) = m \Leftrightarrow \exists A^{-1}(t), \forall t, \quad (13b)$$

– условия регулярности:

$$\text{rang}B(t) = m \Leftrightarrow \exists B^{-1}(t), \forall t. \quad (13b)$$

Очевидно, что аналитическое решение (12) мало пригодно для практических целей, ибо требует определения функциональных обратных матриц  $A^{-1}(t)$ ,  $B^{-1}(t)$  и  $[A(t) \otimes B^{-T}(t) - B^*(t) \otimes A^{-*T}(t)]^{-1}$ . Для этого, конечно, могут быть использованы известные методы, предложенные, в частности, в [29–33] и основанные на дифференциальных преобразованиях. Однако это достаточно обременительно, особенно для третьей (кронекеровой) матрицы. Поэтому необходимо искать другие пути разрешения этой проблемы. К одному из таких возможных подходов и перейдем далее.

**Последовательный численно-аналитический метод решения.** Предположим, что матрицы  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  и  $X(t)$ , а также обратные  $A^{-1}(t)$ ,  $B^{-1}(t)$  и сопряженные  $B^*(t)$ ,  $C^*(t)$ ,  $A^{-*}(t)$ ,  $B^{-*}(t)$ ,  $A^{-*T}(t)$  в центре аппроксимации  $t = t_v$  обладают аналитическими элементами, для которых имеют место следующие дифференциальные преобразования [1]:

$$\begin{aligned} A(K) &= \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K A(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \\ &\equiv A(t) = \chi_1(t, t_v, H, A(K)), \quad K = \overline{0, \infty}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$B(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K B(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty}$$

$$\equiv B(t) = \chi_2(t, t_v, H, B(K)), \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (15)$$

$$C(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K C(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty}$$

$$\therefore C(t) = \chi_3(t, t_v, H, C(K), K = \overline{0, \infty}), \quad (16)$$

$$A^{-1}(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K A^{-1}(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty}$$

$$\therefore A^{-1}(t) = \chi_4(t, t_v, H, A^{-1}(K), K = \overline{0, \infty}), \quad (17)$$

$$B^{-1}(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K B^{-1}(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty}$$

$$\therefore B^{-1}(t) = \chi_5(t, t_v, H, B^{-1}(K), K = \overline{0, \infty}), \quad (18)$$

$$B^*(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K B^*(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty}$$

$$\therefore B^*(t) = \chi_6(t, t_v, H, B^*(K), K = \overline{0, \infty}), \quad (19)$$

$$C^*(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K C^*(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty}$$

$$\therefore C^*(t) = \chi_7(t, t_v, H, C^*(K), K = \overline{0, \infty}), \quad (20)$$

$$A^{-*}(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K A^{-*}(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty}$$

$$\therefore A^{-*}(t) = \chi_8(t, t_v, H, A^{-*}(K), K = \overline{0, \infty}). \quad (21)$$

$$B^{-*}(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K B^{-*}(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty}$$

$$\therefore B^{-*}(t) = \chi_9(t, t_v, H, B^{-*}(K), K = \overline{0, \infty}). \quad (22)$$

$$A^{-*T}(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K A^{-*T}(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty}$$

$$\therefore A^{-*T}(t) = \chi_{10}(t, t_v, H, A^{-*T}(K), K = \overline{0, \infty}), \quad (23)$$

$$X(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K X^K(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty}$$

$$\therefore X(t) = \chi_{11}(t, t_v, H, X(K), K = \overline{0, \infty}). \quad (24)$$

Заметим, что в соотношениях (17), (18) и (21)–(22) матрицы  $A^{-1}(K)$ ,  $B^{-1}(K)$ ,  $A^{-*}(K)$ ,  $B^{-*}(K)$  и  $A^{-*T}(K)$ -матричные дискреты обратных матриц  $A^{-1}(t)$ ,  $B^{-1}(t)$ ,  $A^{-*}(t)$ ,  $B^{-*}(t)$  и  $A^{-*T}(t)$ , а не обратные матрицы матричных дискрет  $A(K)$ ,  $B(K)$ ,  $A^*(K)$ ,  $B^*(K)$  и  $A^{*T}(K)$ .

Теперь с учетом (14)–(24) гиперматрично-гипервекторную линейную систему (8) из области оригиналов переведем в область дифференциальных изображений. Получим:

– при  $K=0$ :

$$01 [A(0) \otimes B^{-T}(0) - B^*(0) \otimes A^{-V}(0)] \times \\ \times \hat{X}(0) = D(0, 0) \cdot \hat{X}(0) = C(0) \cdot B^{-1}(0) - C^*(0) \cdot A^{-V}(0) = \hat{D}_1(0), \quad (25)$$

откуда

$$\hat{X}(0) = D^{-1}(0, 0) \cdot \hat{D}_1(0), \quad (26)$$

$$\text{rang } D(0, 0) = m^2; \quad (27)$$

– при  $K=1$ :

$$[A(0) \otimes B^{-T}(0) - B^*(0) \otimes A^{-V}(0)] \cdot \hat{X}(1) + \\ + [A(1) \otimes B^{-T}(0) + A(0) \otimes B^{-V}(1) - \\ - B^*(1) \otimes A^{-V}(0) - B^*(0) \otimes A^{-V}(1)] \cdot \hat{X}(0) = \\ = D(0, 0) \cdot \hat{X}(1) + D(1, 0; 0, 1) \cdot \hat{X}(0) = \\ = C(1) \cdot B^{-1}(0) + C(0) \cdot B^{-1}(1) - C^*(1) \cdot A^{-V}(0) - C^*(0) \cdot A^{-V}(1) = \hat{D}_1(1), \quad (28)$$

$$\hat{X}(1) = D^{-1}(0, 0) \cdot [\hat{D}_1(1) - D(1, 0; 0, 1) \cdot \hat{X}(0)]; \quad (29)$$

– при  $K=2$ :

$$01 - B^*(0) \otimes A^{-V}(1) \cdot \hat{X}(1) + [A(2) \otimes B^{-T}(0) + A(1) \otimes B^{-V}(1) + A(0) \otimes B^{-V}(2) - B^*(2) \otimes A^{-V}(0) - \\ - B^*(1) \otimes A^{-V}(1) - B^*(0) \otimes A^{-V}(2)] \cdot \hat{X}(0) = D(0, 0) \cdot \hat{X}(2) + D(1, 0; 0, 1) \cdot \hat{X}(1) + D(2, 0, 1; 0, 2) \cdot \hat{X}(0) = \\ = C(2) \cdot B^{-1}(0) + C(1) \cdot B^{-1}(1) + C(0) \cdot B^{-1}(2) - C^*(2) \cdot A^{-V}(0) - C^*(1) \cdot A^{-V}(1) - C^*(0) \cdot A^{-V}(2) = \hat{D}_1(2), \quad (30)$$

откуда

$$\hat{X}(2) = D^{-1}(0,0) \cdot [\hat{D}_l(2) - D(1,0;0,1) \cdot \hat{X}(1) - D(2,0;1,1;0,2) \cdot \hat{X}(0)]; \quad (31)$$

.

.

.

– при  $K=K$ :

$$\begin{aligned} & [A(0) \otimes B^{\vee}(0) - B^*(0) \otimes A^{\vee}(0)] \cdot \hat{X}(K) + \\ & + [A(1) \otimes B^{\vee}(0) + A(0) \otimes B^{\vee}(1) - B^*(1) \otimes A^{\vee}(0) - \\ & - B^*(0) \otimes A^{\vee}(1)] \cdot \hat{X}(K-1) + [A(2) \otimes B^{\vee}(0) + \\ & + A(1) \otimes B^{\vee}(1) + A(0) \otimes B^{\vee}(2) - B^*(2) \otimes A^{\vee}(0) - \\ & - B^*(1) \otimes A^{\vee}(1) - B^*(0) \otimes A^{\vee}(2)] \cdot \hat{X}(K-2) + \dots + \\ & + [A(K-1) \otimes B^{\vee}(0) + A(K-2) \otimes B^{\vee}(1) + \dots + \\ & 01 \dots + A(0) \otimes B^{\vee}(K-1) - B^*(K-1) \otimes A^{\vee}(0) - \\ & - B^*(K-2) \otimes A^{\vee}(1) - \dots - B^*(0) \otimes A^{\vee}(K-1)] \cdot \hat{X}(1) + \\ & + [A(K) \otimes B^{\vee}(0) + A(K-1) \otimes B^{\vee}(1) + \dots + A(0) \otimes \\ & \otimes B^{\vee}(K) - B^*(K) \otimes A^{\vee}(0) - B^*(K-1) \otimes A^{\vee}(1) - \dots \\ & - B^*(0) \otimes A^{\vee}(K)] \cdot \hat{X}(0) = D(0,0) \otimes \hat{X}(K) + \\ & + D(1,0;0,1) \cdot \hat{X}(K-1) + D(2,0;1,1;0,2) \cdot \hat{X}(K-2) + \dots \\ & + D(K-1,0;K-2,1;\dots;1,K-2;0,K-1) \times \\ & \times \hat{X}(1) + D(K,0;\dots;0,K) \cdot \hat{X}(0) = \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} C(K) \cdot B^{\vee}(0) + C(K-1) \cdot B^{\vee}(1) + \dots + C(0) \cdot B^{\vee}(K) - \\ -C^*(K) \cdot A^{\vee}(0) - C^*(K-1) \cdot A^{\vee}(1) - \dots - C(0) \cdot A^{\vee}(K) \end{bmatrix} = \hat{D}_l(K), \quad (32)$$

$D(0,0)$	0	0	0	0	...	0
$D(1,0;0,1)$	$D(0,0)$	0	0	0	...	0
$D(2,0;1,1;0,2)$	$D(1,0;0,1)$	$D(0,0)$	0	0	...	0
...	$D(2,0;1,1;0,2)$	$D(1,0;0,1)$	$D(0,0)$	0	...	0
...	...	$D(2,0;1,1;0,2)$	$D(1,0;0,1)$	$D(0,0)$	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$D(K,0,\dots,0,K)$	$D(K-1,\dots,K-1)$	$D(K-2,\dots,K-2)$	$D(K-3,\dots,K-3)$	$D(K-4,\dots,K-4)$	...	$D(0,0)$

$$(K+1) \cdot m^2 \times (K+1) \cdot m^2 \quad (K+1) \cdot m^2 \times 1 \quad (K+1) \cdot m^2 \times 1$$

или в компактной форме записи

$$D(\bullet) \cdot \hat{X}(\bullet) = \hat{D}_l(\bullet), \quad (36)$$

откуда

$$\hat{X}(\bullet) = D^{-1}(\bullet) \cdot \hat{D}_l(\bullet). \quad (37)$$

Очевидно, что при условии гиперрегулярности (27) из (35) немедленно следует и условие гиперрегулярности

$$\text{rang } D(\bullet) = (K+1) \cdot m^2 \quad (38)$$

задачи (36).

откуда

$$\begin{aligned} \hat{X}(K) &= [A(0) \otimes B^{\vee}(0) - B^*(0) \otimes A^{\vee}(0)]^{-T} \times \\ & \times \left[ \sum_{\ell=0}^K (C(\ell) \cdot B^{\vee}(K-\ell) - C^*(\ell) \cdot A^{\vee}(K-\ell)) - \right. \\ & \left. - \sum_{\ell=0}^P \sum_{P=1}^K [A(\ell) B^{\vee}(P-\ell) - B^*(\ell) \otimes A^{\vee}(P-\ell)] \cdot X(K-P) \right] = \\ & = D^{-1}(0,0) \cdot [\hat{D}_l(K) - D(1,0;0,1) \cdot \hat{X}(K-1) - \\ & - D(2,0;1,1;0,2) \cdot \hat{X}(K-2) - \dots - \\ & - D(K-1,0;K-2,1;\dots;1,K-2;0,K-1) \times \\ & \times \hat{X}(1) - D(K,0;\dots;0,K) \cdot \hat{X}(0)]. \end{aligned} \quad (33)$$

Таким образом, имея матричные дискреты (26), (29), (31) и (33), в соответствии с правой частью (22) можно найти решение  $X(t)$  исходной задачи (6) или матричного уравнения (9).

**Замечание 2.** Очевидно, что при использовании последовательного численно-аналитического метода для однозначной разрешимости задачи (6) должны быть одновременно выполнены:

- условие гиперрегулярности (27), (34a)
- условия регулярности:

$$\text{rang } A^{-1}(K) = m, \quad \forall K = \overline{0, \infty}, \quad (34b)$$

– условия регулярности:

$$\text{rang } B^{-1}(K) = m, \quad \forall K = \overline{0, \infty}. \quad (34b)$$

**Параллельный численно-аналитический метод решения.** Объединив соотношения (25), (28), (30) и (32), получим следующее линейное гиперматрично-гипервекторное представление

$$\begin{bmatrix} D(0,0) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ D(1,0;0,1) & D(0,0) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ D(2,0;1,1;0,2) & D(1,0;0,1) & D(0,0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & D(2,0;1,1;0,2) & D(1,0;0,1) & D(0,0) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & D(2,0;1,1;0,2) & D(1,0;0,1) & D(0,0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D(K,0,\dots,0,K) & D(K-1,\dots,K-1) & D(K-2,\dots,K-2) & D(K-3,\dots,K-3) & D(K-4,\dots,K-4) & \dots & D(0,0) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \hat{X}(0) \\ \hat{X}(1) \\ \hat{X}(2) \\ \hat{X}(3) \\ \hat{X}(4) \\ \vdots \\ \hat{X}(K) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{D}_l(0) \\ \hat{D}_l(1) \\ \hat{D}_l(2) \\ \hat{D}_l(3) \\ \hat{D}_l(4) \\ \vdots \\ \hat{D}_l(K) \end{bmatrix} \quad (35)$$

С другой стороны, нетрудно убедиться, что обратная гиперматрица в (37)

$$D^{-1}(\bullet) = \begin{bmatrix} D_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ D_1 & D_0 & 0 & \dots & 0 \\ D_2 & D_1 & D_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_K & D_{K-1} & D_{K-2} & \dots & D_0 \end{bmatrix},$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} D_0 = D^{-1}(0,0) = D^{-1}(0,0) \cdot E = D^{-1}(0,0) \cdot \bar{D}_0, \\ D_1 = -D^{-1}(0,0) \cdot [D(1,0; 0,1) \cdot D^{-1}(0,0)] = D^{-1}(0,0) \cdot \bar{D}_1, \\ D_2 = -D^{-1}(0,0) \cdot [D(2,0; 1,1; 0,2) \cdot D^{-1}(0,0)] - \\ - [D(1,0; 0,1) \cdot D^{-1}(0,0)]^2 = D^{-1}(0,0) \cdot \bar{D}_2, \\ \dots \\ D_K = -D^{-1}(0,0) \cdot \sum_{P=1}^K D(P) \cdot D_{K-P} = D^{-1}(0,0) \cdot \bar{D}_K. \end{array} \right.$$

Таким образом, имея гипервектор  $\hat{X}(\bullet)$ , в соответствии с правой частью (22) можно восстанавливать решение  $X(t)$  исходной задачи (6) (или матричного уравнения (9)).

*Замечание 3.* Очевидно, что при использовании параллельного численно-аналитического метода для однозначной разрешимости задачи (6) должны быть одновременно выполнены:

– условие гиперрегулярности (38), (39a)

– условия регулярности (34 б), (39б)

– условия регулярности (34 в) (39в)

#### 4 ЭКСПЕРИМЕНТЫ

С целью проверки работоспособности предложенных последовательного и параллельного численно-аналитических методов они были программно реализованы в среде MATLAB [34] на модельном примере-матричного уравнения вида (6), где

$$A(t) = \begin{bmatrix} j & 0 \\ t & (1+t) \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} (1+t) & 1 \\ j & 0 \end{bmatrix},$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} (t-jt) & -j \\ 0 & (1-j+t-jt^2) \end{bmatrix}.$$

При этом, как нетрудно вычислить, матрицы

$$A^{-1}(t) = \begin{bmatrix} -j & 0 \\ jt & \frac{1}{1+t} \end{bmatrix}, \quad B^{-1}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -j \\ 1 & (1+t)j \end{bmatrix}.$$

Тогда при  $t_v = 1, H=1$  получено, что

$$A(0) = \begin{bmatrix} j & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A(K) = [0], \quad \forall K \geq 2;$$

$$A^{-1}(0) = A^{\vee}(0) = \begin{bmatrix} -j & 0 \\ 0,5j & 0,5 \end{bmatrix}, \quad A^{-1}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,25j & -0,25 \end{bmatrix}, \quad A^{-1}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0,125 & 0,125 \end{bmatrix},$$

$$B(0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ j & 0 \end{bmatrix}, \quad B(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B(K) = [0], \quad \forall K \geq 2;$$

$$B^{-1}(0) = B^{\vee}(0) = \begin{bmatrix} 0 & -j \\ 1 & 2j \end{bmatrix}, \quad B^{-1}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix},$$

$$B^{-1}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$C(0) = \begin{bmatrix} 1-j & -j \\ 0 & 2-2j \end{bmatrix}, \quad C(1) = \begin{bmatrix} 1-j & 0 \\ 0 & 1-2j \end{bmatrix},$$

$$C(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix}, \quad C(K) = [0], \quad \forall K \geq 3,$$

а для дискрет сопряженных матриц

$$A^{-*}(0) = \begin{bmatrix} j & -0,5j \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad A^{-*}(1) = \begin{bmatrix} 0 & -0,25j \\ 0 & -0,25 \end{bmatrix},$$

$$A^{-*}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0,125j \\ 0 & 0,125 \end{bmatrix};$$

$$B^{*}(0) = \begin{bmatrix} 2 & -j \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^{*}(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^{*}(K) = [0], \quad \forall K \geq 2;$$

$$C^{*}(0) = \begin{bmatrix} 1+j & 0 \\ j & 2+2j \end{bmatrix}, \quad C^{*}(1) = \begin{bmatrix} 1+j & 0 \\ 0 & 1+2j \end{bmatrix},$$

$$C^{*}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix}, \quad C(K) = [0], \quad \forall K \geq 3.$$

#### 5 РЕЗУЛЬТАТЫ

Далее, при представленных матричных дискретах имеем:

$$D(0,0) = \left[ \begin{array}{cc|cc} -2j & j & -1 & 0 \\ 1+j & -3 & 0,5 & 0,5j \\ \hline -j & 1 & 0 & 2 \\ -0,5j & -0,5+2j & -2j & 4j \end{array} \right],$$

$$D^{-1}(0,0) = \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,0147 + 0,3529j & -0,0882 & 0,0294 + 0,375j & -0,1765 + 0,0147j \\ -0,1765 + 0,0735j & -0,3529 - 0,0294j & -0,0074 + 0,1765j & -0,0441 \\ \hline -0,3676 - 0,1471j & 0,0294 - 0,1765j & 0,5735 - 0,0662j & 0,0294 + 0,3088j \\ -0,0882 - 0,0441j & 0,1765 - 0,0294j & 0,3162 - 0,0735j & 0,0147 - 0,0882j \end{array} \right],$$

$$\hat{D}_1(0) = \begin{pmatrix} 1-2j \\ 0,5-0,5j \\ 3-2j \\ 2,5+3j \end{pmatrix},$$

$$D(1,0; 0,1) = \left[ \begin{array}{cc|cc} -j & 0 & 0 & 0 \\ j & -1 & 0,25 & -0,25j \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ -0,75j & 0,25+3j & -j & 4j \end{array} \right],$$

$$\hat{D}_1(1) = \begin{pmatrix} 1-j \\ -0,75-0,25j \\ 1-2j \\ 5,75+3,5j \end{pmatrix}, \quad \hat{X}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -j \end{pmatrix},$$

$$D(2,0; 1,1; 0,2) = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & & 0 & 0 \\ & 0 & -0,125 & 0,125j \\ \hline & & 0 & 0 \\ -0,125j & -0,125+j & 0 & j \end{array} \right],$$

$$\hat{D}_1(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,125+0,125j \\ -j \\ 4,125+0,75j \end{pmatrix}, \quad \hat{X}(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\hat{X}(K) = (0), \quad \forall K \geq 2.$$

При применении параллельного численно-аналитического метода

$$D_0 = \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,0147+0,3529j & -0,0882 & 0,0294+0,375j & -0,1765+0,0147j \\ -0,1765+0,0735j & -0,3529-0,0294j & -0,0074+0,1765j & -0,0441 \\ \hline -0,3676-0,1471j & 0,0294-0,1765j & 0,5735-0,0662j & 0,0294+0,3088j \\ -0,0882-0,0441j & 0,1765-0,0294j & 0,3162-0,0735j & 0,0147-0,0882j \end{array} \right],$$

$$D_1 = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0,0026-0,1211j & 0,0303 & 0,0095-0,1507j & 0,1488-0,0026j \\ -0,0277-0,0424j & 0,1211-0,0095j & 0,0050-0,1488j & 0,0372 \\ \hline 0,1531-0,0182j & 0,0095+0,1488j & 0,2223-0,0435j & 0,0095-0,0839j \\ 0,2067+0,0078j & 0,0277+0,0493j & -0,0815+0,0277j & -0,0026+0,1185j \end{array} \right],$$

$$\hat{X}(0) = D_0 \cdot \hat{D}_1(0) = ((1+j) \quad j \mid 0 \quad (1-j))^T,$$

$$\hat{X}(1) = D_1 \cdot \hat{D}_1(0) + D_0 \cdot \hat{D}_1(1) = (0 \quad 0 \mid 0 \quad -j)^T,$$

$$\hat{X}(2) = D_2 \cdot \hat{D}_1(0) + D_1 \cdot \hat{D}_1(1) + D_0 \cdot \hat{D}_1(2) = (0 \quad 0 \mid 0 \quad 0)^T,$$

$$\hat{X}(K) = [0], \quad \forall K \geq 2.$$

Итак при использовании обратных дифференциально-тейлоровских преобразований решение задачи будет выглядеть так:

$$X(t) = X(0) + X(t) \cdot (t-1) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1+j & j \\ 0 & 1-j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix} \cdot (t-1) = \begin{bmatrix} (1+j) & j \\ 0 & (1-jt) \end{bmatrix},$$

в абсолютной точности которого легко убедиться подстановкой его в исходное матричное уравнение.

## 6 ОБСУЖДЕННІ

Таким образом можно констатировать, что предложенные численно-аналитические методы обладают определенными достоинствами и недостатками.

В числе достоинств этих методов можно отметить следующее:

- последовательный численно-аналитический метод достаточно прост при реализации рекуррентных численных процедур;

- параллельный численно-аналитический метод обладает высокой вычислительной эффективностью в связи с возможностью организации поточных численных процедур.

В числе недостатков этих методов можно отметить:

- необходимость выполнения большого объема вычислений, что обусловлено, скорее всего, сложностью решаемого класса задач, нежели характеристиками самых численно-аналитических методов;

- при параллельном численно-аналитическом методе с целью увеличения точности решения исходной задачи при небольшом увеличении значения целочисленного аргумента  $K$  (что, по сути, эквивалентно увеличению слагаемых в соответствующем ряде Тейлора) происходит значительное увеличение размерности гиперсистемы (35) с вытекающими отсюда хорошо известными отрицательными последствиями [35].

*Замечание 4.* При рассмотренном простом модельном примере с целью демонстрации вычислительных характеристик предложенных методов мы воспользова-

лись точними аналітическими соотношениями  $A^{-1}(t)$  и  $B^{-1}(t)$  и их матричными дискретами  $A^{-1}(K)$  и  $B^{-1}(K)$ ,  $\forall K = \overline{0, \infty}$ . Однако, как отмечено выше, определение и дальнейшее использование таких матриц на практике связано с большими вычислительными трудностями, и обычно приходится оперировать их аппроксимированными (приближенными) представлениями.

## ВЫВОДЫ

В настоящей работе для решения однопараметрических сопряженных аналогов матричных уравнений типа Сильвестра предложены аналитический, а также приближенные последовательный и параллельный численно-аналитический методы. Последние основаны на дифференциальных преобразованиях и позволяют решение исходной непрерывной задачи свести к некоторым рекуррентным численным процедурам, эффективно реализуемыми средствами современных информационных технологий [34–36] и восстановлению сравнительно легко непрерывного решения  $X(t)$  на основе некоторого обратного дифференциального преобразования (22).

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в Базовой научно-исследовательской лаборатории «Системного анализа» при кафедре «Информационных технологий и автоматизации» Национального политехнического университета Армении в рамках научно-исследовательской темы «Разработка и исследование дифференциальных моделей решения задач системного анализа» (номер 10-4/1-13).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пухов Г. Е. Дифференциальные преобразования функций и уравнений / Г. Е. Пухов. – К. : Наукова думка, 1984. – 420 с.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 2010. – 560 с.
3. Мамонов С. С. Решение матричных уравнений / С. С. Мамонов // Вестник Ряз. гос. ун-та им. С. А. Есенина. – 2009. – Вып. 21, № 1. – С. 115–136.
4. Чуйко С. М. О решении матричного уравнения Сильвестра / С. М. Чуйко // Вестник Одесского национального университета. Сер. : Математика и механика. – 2014. – Т.19:1, № 21. – С. 49–57.
5. Чуйко С. М. О решении матричных уравнений Ляпунова / С. М. Чуйко // Вестник Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина. Серия : Математика, прикладная математика и механика. – 2014. – № 1120. – С. 85–94.
6. Чуйко С. М. О решении обобщенного матричного уравнения Ляпунова / С. М. Чуйко // Чебышевский сб. – 2015.– Т.16, Вып. 1. – С. 52–66.
7. Икрамов Х. Д. Матричные уравнения  $A' + X + X^T + C = B$  и  $A' + X + X^* + C = B$  / Х. Д. Икрамов, Ю. О. Воронцов // Доклады РАН. – 2013. – Т. 449, № 5. – С. 513–515.
8. Piao F. X. The solution to matrix equation  $A' + X + X^T + C = B$  / F. X. Piao, Q. L. Zhang, Z. F. Wang // Journal of the Franklin Institute. – 2007. – № 344. – Р. 1056–1062.
9. Fernando D. T. The solution of the equation  $X' + A + A' + X^T = 0$  and its application to the theory of orbits / D. T. Fernando, M. D. Frolian // Linear Algebra and its Application. – 2011. – № 434. – Р. 44–67.
10. Djordjevic D. S. Explicit solution of the operator equation  $A' + X^* + X^{**} + A = B$  / D. S. Djordjevic // J. Comput. Appl. Math. – 2007, № 200. – Р. 701–704.
11. Zhao Linlin Solution of the operator equation  $A' + X + X^* + B = C$  / L. Zhao // Pur and Applied Mathematics. – 2012. – Vol. 28, №4. – Р. 469–474.
12. Wang Zi-Wen A matrix function with applications / Z.-W. Wang // Communication on Applied Mathematics and Computation. – 2014. – Vol. 28, № 4. – Р. 449–453.
13. Икрамов Х. Д. Об однозначной разрешимости матричного уравнения  $A' + X + X^T + C = B$  в сингулярном случае / Х. Д. Икрамов, Ю. О. Воронцов // Доклады РАН. – 2011. – Т. 438, № 5. – С. 599–602.
14. Воронцов Ю. О. Об условиях однозначной разрешимости матричного уравнения  $A' + X + X^* + B = C$  / Ю. О. Воронцов, Х. Д. Икрамов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2012. – Т. 52, № 5. – С. 775–783.
15. Икрамов Х. Д. Численное решение матричных уравнений / Х. Д. Икрамов. – М. : Наука, 1984. – 190 с.
16. Воронцов Ю. О. Численный алгоритм для решения матричного уравнения  $A \cdot X + X^T \cdot B = C$  / Ю. О. Воронцов, Х. Д. Икрамов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 5. – С. 739–747.
17. Воронцов Ю. О. О численном решении матричных уравнений  $A \cdot X + X^T \cdot B = C$  и  $X + A \cdot X^T \cdot B = C$  с прямоугольными коэффициентами  $A$  и  $B$  / Ю. О. Воронцов, Х. Д. Икрамов // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2012. – Т. 405. – С. 54–58.
18. Воронцов Ю. О. Численный алгоритм для решения матричного уравнения  $A \cdot X + X^* \cdot B = C$  / Ю. О. Воронцов // Вестник Московского Университета. – 2013. – № 1. – С. 3–9.
19. Воронцов Ю. О. Численные алгоритмы для решения матричных уравнений  $A \cdot X + X^T \cdot C = B$  и  $A \cdot X + X^* \cdot C = B$  / Ю. О. Воронцов, Х. Д. Икрамов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2013. – Т. 53, № 6. – С. 843–852.
20. Воронцов Ю. О. Численное решение матричных уравнений  $A \cdot X + X^T \cdot C = B$  и  $A \cdot X + X^* \cdot C = B$  в самосопряженном случае / Ю. О. Воронцов, Х. Д. Икрамов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54, № 2. – С. 179–182.
21. Симонян С. О. Методы решения однопараметрических матричных непрерывных уравнений типа Сильвестра  $A(t) \cdot X(t) + X(t) \cdot B(t) = C(t)$  / С. О. Симонян // Известия НАН РА и НПУА. – 2015. – Сер. Т. Н., Т. LXVIII. – № 3. – С. 370–380.
22. Симонян С. О. Декомпозиционные методы решения однопараметрических матричных непрерывных уравнений типа Сильвестра  $A(t) \cdot X(t) + X(t) \cdot B(t) = C(t)$  / С. О. Симонян // Известия НАН РА и НПУА. – 2015. – Сер. ТН. – Т. LXVIII, № 4. – С. 497–510.
23. Симонян С. О. Методы решения линейных однопараметрических матричных непрерывных уравнений типа  $A^T(t) \cdot X(t) + X(t) \cdot A(t) = C(t)$  / С. О. Симонян // Вестник ИАА. – 2015. – Т. 15. – С. 216–224.
24. Симонян С. О. К решению однопараметрических транспонированных аналогов матричных уравнений типа Сильвестра  $A(t) \cdot X(t) + X^T(t) \cdot B(t) = C(t)$  / С. О. Симонян // Известия НАН РА и НПУА, Сер. ТН. – 2016. – Т. LXIX, № 1. – С. 49–60.
25. Симонян С. О. К решению однопараметрических матричных уравнений типа Стейна  $A(t) \cdot X(t) \cdot B(t) - X(t) = C(t)$  / С. О. Симонян // Вестник НПУА. Сер. «Информационные технологии, электроника, радиотехника». – 2015. – № 2. – С. 32–43.
26. Симонян С. О. Декомпозиционные методы решения однопараметрических матричных уравнений типа Стейна  $A(t)^T + X(t)^T + B(t) - X(t) = C(t)$  / С. О. Симонян // Известия НАН РА и НПУА. Сер. ТН. – 2016. – Т. LXIX, № 2. – С. 176–191.
27. Симонян С. О. Прикладные аспекты применения ДТ-преобразований при построении траекторий равновесных состояний динамических систем / С. О. Симонян // Электрон. моделирование. – 1993. – Т. 15, № 2. – С. 58–65.
28. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М. : С.Пб. : Физматлит, 2002. – 632 с.

29. Бадалян Л. А. Разработка методов определения псевдообратных нестационарных матриц и автоматизация вычислительных процедур : автореф. дис. ... к.т.н.: 05.13.02 «Системы автоматизации» / Л. А. Бадалян. – Ереван, 2007. – 21 с.
30. Симонян А. С. Разработка численно-аналитических методов определения параметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза и автоматизация вычислительных процедур: автореф. дис. ... к.т.н.: 05.13.02 «Системы автоматизации» / А. С. Симонян. – Ереван, 2013. – 24 с.
31. Симонян С. О. Параллельные вычислительные методы определения параметрических обобщенных обратных матриц / С. О. Симонян // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 323, №5. – С. 10–15.
32. Методы определения комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза (I) / [Симонян С. О., Адамян Г. В., Симонян А. С. и др.] // Вестник ГИУА.
- Сер. «Информационные технологии, Электроника, Радиотехника». –2014. – Вып. 17, Том 1. – С. 20–28.
33. Декомпозиционные методы определения комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц (II) / [Симонян С. О., Адамян Г. В., Симонян А. С. и др.] // Известия НАН РА и ГИУА. – 2014. – Сер. ТН. – Т. LXVII, № 4. – С. 425–433.
34. Дьяконов В. П. MATLAB и SIMULINK для радиоинженеров / В. П. Дьяконов. – М. : ДМК Пресс, 2016. – 976 с.
35. Воеводин В. В. Параллельные вычисления / В. В. Воеводин, Вл. В. Воеводин. – С. Пб. : «БХВ-Петербург», 2004. – 608 с.
36. Stroustrup B. The C++ programming language. 4<sup>th</sup> edition / B. Stroustrup. – Boston : Addison-Wesley Professional, 2013. – 1368 р.

Статья поступила в редакцию 13.04.2016.

После доработки 28.04.2016.

Симонян С. О.<sup>1</sup>, Айвазян А. А.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Д-р техн. наук, профессор, завідувач кафедри інформаційних технологій і автоматизації Національного політехнічного університету Вірменії, Ереван, Вірменія

<sup>2</sup>Старший технік базової науково-дослідної лабораторії системного аналізу кафедри інформаційних технологій і автоматизації Національного політехнічного університету Вірменії, Вірменія

### ДО РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОПАРАМЕТРИЧНИХ МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ A(t)·X(t) + X\*(t)·B(t) = C(t)

Розглянуто однопараметричні сполучені аналоги матричних рівнянь типу Сильвестра. На основі нескладних перетворень отримано еквівалентне матричне рівняння, що містить тільки невідому матрицю, яка підлягає визначенню. Далі, використанням апарату кронекерових добутків матриць, отримано аналітичний розв'язок задачі, який обмежений в практичних застосуваннях, однак служить основою для розробки чисельно-аналітичних методів розв'язання початкової задачі. Запропоновані послідовний та паралельний чисельно-аналітичні методи розв'язання, засновані на диференціальних перетвореннях Г. Е. Пухова. При послідовному чисельно-аналітичному методі оперуємо числовими рекурентними процедурами на першому етапі обчислень та аналітичними спiввiдношеннями – на другому етапi. При паралельному чисельно-аналітичному методі оперуємо лiнiйною гiперсистемою числових рiвнянь на першому етапi обчислень та аналiтичнимi спiвvidenшenнями – на другому етапi. При всiх методах отриманi вiдповiднi умови однозначної вирiшуваностi задачi. Розглянуто модельний приклад, для якого при використаннi чисельно-аналiтичних методiв отриманo точний тейлоровський розв'язок. Запропонованi чисельно-аналiтичнi методи можуть бути ефективно реалiзованi засобами сучасних iнформацiйних технологiй.

**Ключові слова:** однопараметричний сполучений аналог матричного рівняння типу Сильвестра, редукція задачі, аналітичний метод розв'язку, диференціальнi перетворення, послідовний та паралельний чисельно-аналітичнi методи, модельний приклад, умови однозначної розв'язностi задачi.

Simonyan S. H.<sup>1</sup>, Ayvazyan A. A.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Dr. Sc., Prof., Head of the Chair «Information Technologies and Automation» (IT and A) of National Polytechnic University of Armenia

<sup>2</sup>Senior technician, Base scientific research laboratory «System analysis» of Chair «Information Technologies and Automation» the department of National Polytechnic University of Armenia

### TO THE SOLUTION OF ONE-PARAMETRIC MATRIX EQUATIONS OF A(T)·X(T)+X\*(T)·B(T)=C(T) TYPE

We consider the one-parameter conjugated analogs of Sylvester type matrix equations. On the basis of simple transformations we obtain the equivalent matrix equation containing only the unknown matrix which should be determined. Next, using the apparatus of Kronecker products of matrices, the analytical solution of the problem was obtained, which is limited in practical applications, but serves as a basis for the development of numerical-analytical methods for solving the original problem. Serial and parallel numerical and analytical solution methods are proposed based on the differential transformations G. E. Pukhov. With sequential numerical-analytical method we operate with numeric recursive procedures in the first stage of the calculation, and analytical relations – in the second stage. In parallel numerical-analytical method we operate with linear hypersystem of numerical equations in the first stage of the calculation, and analytical relations – in the second stage. For all the methods the relevant conditions for the unique solvability of the problem were obtained. A model example was considered for which using numerical and analytical methods an exact solution of the Taylor was obtained. The proposed numerical-analytical techniques can be efficiently implemented by means of modern information technology.

**Keywords:** one-parametric conjugated analogue of parameter matrix equation of Sylvester type, reduction of the problem, an analytical method of solution, differential transformations, serial and parallel methods, model example, conditions for the unique solvability of the problem.

### REFERENCES

- Puhov G. E. Differencial'nye preobrazovaniya funkciy i uravnenij. Kiev, Naukova dumka, 1984, 420 p.
- Gantmaher F.R. Teoriya matric. Moscow, Nauka, 2010, 560 p.
- Mamonov S. S. Reshenie matrichnyh uravnemij, Vestnik Rjaz. gos. un-ta im. S. A. Esenina. Rjazan', 2009, Vyp. 21, No. 1, pp. 115–136.
- Chujko S. M. O reshenii matrichnogo uravnenija Sil'vestra, Vestnik Odesskogo nacional'nogo universiteta. Ser.: Matematika i mehanik, 2014, Vol. 19:1, No. 21, pp. 49–57.
- Chujko S. M. O reshenii matrichnyh uravnemij Ljapunova, Vestnik Har'kovskogo nacional'nogo universiteta im. V.N. Karazina. Serija: Matematika, prikladnaja matematika i mehanika, 2014, No. 1120, pp. 85–94.
- Chujko S. M. O reshenii obobshchennogo matrichnogo uravnenija Ljapunova, Chebyshevskij sb., 2015, Vol. 16, Vyp. 1, pp. 52–66.
- Ikramov H. D., Voroncov Ju. O. Matrichnye uravnemija A·X+XT·C=B i A·X+X\*·C=B, Doklady RAN, 2013, Vol. 449, No. 5, pp. 513–515.

8. Piao F. X., Zhang Q. L., Wang Z. F. The solution to matrix equation  $A \cdot X + X \cdot C = B$ , *Journal of the Franklin Institute*, 2007, No. 344, pp. 1056–1062.
9. Fernando D. T., Frolian M. D. The solution of the equation  $X \cdot A + A \cdot X T = 0$  and its application to the theory of orbits, *Linear Algebra and its Application*, 2011, No. 434, pp. 44–67.
10. Djordjevic D. S. Explicit solution of the operator equation  $A \cdot X^* + X^* \cdot A = B$ , *J. Comput. Appl. Math.*, 2007, No. 200, pp. 701–704.
11. Zhao Linlin Solution of the operator equation  $A \cdot X + X^* \cdot B = C$ , *Pur and Applied Mathematics*, 2012, Vol. 28, No. 4, pp. 469–474.
12. Wang Zi-wen A matrix function with applications, *Communication on Applied Mathematics and Computation*, 2014, Vol. 28, No. 4, pp. 449–453.
13. Ikramov H. D., Voroncov Ju.O. Ob odnoznachnoj razreshimosti matrichnogo uravnenija  $A \cdot X + X \cdot C = B$  v singuljarnom sluchae, *Doklady RAN*, 2011, Vol. 438, No. 5, pp. 599–602.
14. Voroncov Ju.O., Ikramov H. D. Ob uslovijah odnoznachnoj razreshimosti matrichnogo uravnenija  $A \cdot X + X^* \cdot B = C$ , *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki*, 2012, Vol. 52, No. 5, pp. 775–783.
15. Ikramov H. D. Chislennoe reshenie matrichnyh uravnenij. Moscow, Nauka, 1984, 190 p.
16. Voroncov Ju. O., Ikramov H. D. Chislenyyj algoritm dlja reshenija matrichnogo uravnenija  $A \cdot X + X \cdot B = C$ , *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki*, 2011, Vol. 5, No. 5, pp. 739–747.
17. Voroncov Ju. O., Ikramov H. D. O chislennom reshenii matrichnyh uravnenij  $A \cdot X + X \cdot B = C$  i  $X + A \cdot X \cdot B = C$  s prjamougl'nymi kojefficientami A i B, *Zapiski nauchnyh seminarov POMI*, 2012, Vol. 405, pp. 54–58.
18. Voroncov Ju.O. Chislenyyj algoritm dlja rshenija matrichnogo uravnenija  $A \cdot X + X^* \cdot B = C$ , *Vestnik Moskovskogo Universiteta*, 2013, No. 1, pp. 3–9.
19. Voroncov Ju. O., Ikramov H. D. Chislenyye algoritmy dlja reshenija matrichnyh uravnenij  $AX + XT \cdot C = B$  i  $A \cdot X + X^* \cdot C = B$ , *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki*, 2013, Vol. 53, No. 6, pp. 843–852.
20. Voroncov Ju. O., Ikramov H. D. Chislenoe reshenie matrichnyh uravnenij  $A \cdot X + X \cdot C = B$  i  $A \cdot X + X^* \cdot C = B$  v samosoprijazhennom sluchae, *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki*, 2014, Vol. 54, No. 2, pp. 179–182.
21. Simonjan S. O. Metody reshenija odnoparametricheskikh matrichnyh nepreryvnyh uravnenij tipa Sil'vestra  $A(t) \cdot X(t) + X(t) \cdot B(t) = C(t)$ , *Izvestija NAN RA i NPUA*, 2015, Ser. T.N., Vol. LXVIII, No. 3, pp. 370–380.
22. Simonjan S. O. Dekompozicionnye metody reshenija odnoparametricheskikh matrichnyh nepreryvnyh uravnenij tipa Sil'vestra  $A(t) \cdot X(t) + X(t) \cdot B(t) = C(t)$ , *Izvestija NAN RA i NPUA*, 2015, Ser.TH, Vol. LXVIII, No. 4, pp. 497–510.
23. Simonjan S. O. Metody reshenija linejnyh odnoparametricheskikh matrichnyh nepreryvnyh uravnenij tipa  $AT(t) \cdot X(t) + X(t) \cdot A(t) = C(t)$ , *Vestnik IAA*, 2015, Vol. 15, pp. 216–224.
24. Simonjan S. O. K resheniju odnoparametricheskikh transponirovannyh analogov matrichnyh uravnenij tipa Sil'vestra  $A(t) \cdot X(t) + XT(t) \cdot B(t) = C(t)$ , *Izvestija NAN RA i NPUA*, Ser. TN, 2016, Vol. LXIX, No. 1, pp. 49–60.
25. Simonjan S. O. K resheniju odnoparametricheskikh matrichnyh uravnenij tipa Stejna  $A(t) \cdot X(t) \cdot B(t) - X(t) = C(t)$ , *Vestnik NPUA*. Ser. «Informacionnye tehnologii, elektronika, radiotekhnika», 2015, No. 2, pp. 32–43.
26. Simonjan S. O. Dekompozicionnye metody reshenija odnoparametricheskikh matrichnyh uravnenij tipa Stejna  $A(t) \cdot X(t) \cdot B(t) - X(t) = C(t)$ , *Izvestija NAN RA i NPUA*, Ser. TH, 2016, T.LXIX, No. 2, pp. 176–191.
27. Simonjan S. O. Prikladnye aspekyt primenjenija DT-preobrazovanij pri postroenii traektroj ravnovesnyh sostojanyj dinamicheskikh sistem, *Elektron. Modelirovanie*, 1993, Vol. 15, No. 2, pp. 58–65.
28. Bahvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobel'kov G. M. Chislenyye metody. Moscow, SPb, fizmat-lit, 2002, 632 p.
29. Badaljan L. A. Razrabotka metodov opredelenija psevdooobratnyh nestacionarnyh matric i avtomatizacija vychislitel'nyh procedur : avtoref. dis. ... k.t.n.: 05.13.02 «Sistemy avtomatizacii». Erevan, 2007, 21 p.
30. Simonjan A. S. Razrabotka chislenno-analiticheskikh metodov opredelenija parametricheskikh obobshhennyh obratnyh matric Mura-Penrouza i avtomatizacija vychislitel'nyh procedur: avtoref. dis. ... k.t.n.: 05.13.02 «Sistemy avtomatizacii», Erevan, 2013, 24 p.
31. Simonjan S. O. Parallel'nye vychislitel'nye metody opredelenija parametricheskikh obobshhennyh obratnyh matric, *Izvestija Tomskogo politehnicheskogo universiteta*, 2013, Vol. 323, No. 5, pp. 10–15.
32. Simonjan S. O., Adamjan G.V., Simonjan A. S. i dr Metody opredelenija kompleksnyh odnoparametricheskikh obobshhennyh obratnyh matric Mura-Penrouza (I), *Vestnik GIUA*. Ser. «Informacionnye tehnologii, Elektronika, Radiotekhnika», 2014, Vyp. 17, Tom 1, pp. 20–28.
33. Simonjan S. O., Adamjan G. V., Simonjan A. S. i dr. Dekompozicionnye metody opredelenija kompleksnyh odnoparametricheskikh obobshhennyh obratnyh matric (II), *Izvestija NAN RA i GIUA*, 2014, Ser. TH, T.LXVII, No. 4, pp. 425–433.
34. D'jakonov V. P. MATLAB i SIMULINK dlja radioinzhenerov. Moscow, DMK Press. 2016, 976 p.
35. Voevodin V. V., Voevodin Vl. V. Parallel'nye vychislenija. Sankt-Peterburg «BHV-Peterburg», 2004, 608 p.
36. Stroustrup B. The C++ programming language. 4th edition. Addison-Wesley Professional, 2013, 1368 p.

# НЕЙРОІНФОРМАТИКА ТА ІНТЕЛЕКТУАЛЬНІ СИСТЕМИ

## НЕЙРОИНФОРМАТИКА И ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

### NEUROINFORMATICS AND INTELLIGENT SYSTEMS

UDC 004.048

Babichev S.<sup>1</sup>, Lytvynenko V.<sup>2</sup>, Taif M. A.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Ph.D., Associate Professor, Associate Professor of the Department of Informatics, Jan Evangelista Purkyne University in Usti nad Labem, Czech Republic

<sup>2</sup>DrSc., professor, head of the Department of Informatics and Computer Sciences, Kherson National Technical University, Kherson, Ukraine

<sup>3</sup>Postgraduate Student of the Department of Informatics and Computer Sciences, Kherson National Technical University, Kherson, Ukraine

#### ESTIMATION OF THE INDUCTIVE MODEL OF OBJECTS CLUSTERING STABILITY BASED ON THE K-MEANS ALGORITHM FOR DIFFERENT LEVELS OF DATA NOISE

The inductive model of the objective clustering of objects based on the  $k$ -means algorithm clustering is presented in the paper. The algorithm for division of initial data into two equal power subsets is proposed and practically implemented. The difference between the mass centres of the appropriate clusters in different clustering is proposed to use as an external balance criterion. Approbation of the proposed model operation was carried out using the data "Compound" and "Aggregation" of the database of the Computing School in the Eastern Finland University. The researches on the estimation of the model stability to a noise component using the data "Seeds" are presented in the paper. The algorithms  $k$ -means,  $c$ -means, inductive  $k$ -means and agglomerative hierarchical algorithm were used to compare the results of the experiment. The ways of further improvement of the proposed model in order to increase the objectivity of investigated data clustering were defined by the results of the simulation.

**Keywords:** inductive modeling, clustering,  $k$ -means algorithm, external balance criterion.

#### NOMENCLATURE

GMDH is the Group Method of Data Handling;

$n$  is the number of observed objects;

$m$  is the number of attributes that characterize the objects;

$k$  is the number of clusters;

$x_{ij}$  is the value of feature in column  $j$  of row  $i$ ;

$x'_{ij}$  is the normalized value of feature in column  $j$  of row  $i$ ;

$med_j$  is the median of  $j$  column;

$q$  is the number of clusters in clustering  $Q$  and  $R$  respectively.

#### INTRODUCTION

Nowadays, great attention is devoted to the issues of the complex objects clustering at the conditions of various data noise levels. First of all it is connected with the increase of the requirements for accuracy of detection and identification systems operation under various conditions of information obtaining. A lot of clustering algorithms exist nowadays. Each of them has its advantages and

disadvantages and is focused on a specific type of data. A high percent of subjectivism is one of the key disadvantages of existing algorithms, i.e. high quality of clustering on a one dataset does not guarantee the same results on another similar dataset. Clustering objectivity improvement is possible by using inductive methods of complex systems modelling based on the Group Method of Data Handling [1–3], where the data processing is carried out by two equal power subsets and a final decision concerning of the nature of the objects partition into the clusters is done based on the complex use of external criteria of relevance and internal criteria of clustering quality estimation. Thereby, the development of hybrid models and methods of objects clustering based on the complex systems inductive modeling methods is an actual problem both fundamentally and practically.

#### 1 PROBLEM STATEMENT

The initial dataset of objects is a matrix:  $A = \{x_{ij}\}_{i=1\dots n, j=1\dots m}$ . The aim of the clustering is a

partition of objects into non-empty subsets of pairwise nonintersecting clusters in accordance with the criteria of remoteness of the object and cluster, taking into account the properties of the objects:

$$K = \{K_s\}, s=1, \dots, k; K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_k = A;$$

$$K_i \cap K_j = \emptyset, i \neq j; i, j = 1, \dots, k.$$

Three fundamental principles, which are taken from different scientific fields, are the basis of methodology of complex systems inductive modeling [1–6]:

- the principle of heuristic self-organizing, i.e., enumeration of models set and the selection of the best model on the basis of the external balance criterion;
- the principle of external addition, i.e. the necessity of additional information using with purpose of objective verification of models;
- the principle of inconclusive solution, i.e. generation of a certain set of intermediate results in order to select the best variant one.

The implementation of these principles within the objective clustering inductive model assumes the following steps:

- normalization of the investigated objects features, i.e. their reduction to identical range with the same median of the objects attributes;
- division of initial data set into two equal power subsets;
- definition of external criterion or group of relevance criteria to choose the optimal clustering for two equal power subsets;
- choice or development of the basic clustering algorithm used as a component in the inductive model of objective clustering of objects.

## 2 REVIEW OF THE LITERATURE

The basic conceptions of creation of inductive method of objects clustering on the basis of Group Method of Data Handling are described in the papers [2–4]. Further development of this theory is reflected in [5, 6]. The conception of the objective cluster analysis is presented in [4] and has been further developed in [7–9]. The authors define the basic principles of objective clustering inductive model creation, show the ways and perspectives of its implementation, define the advantages of clustering inductive model by comparison with traditional data clustering methods. Theoretical developments for implementation of biclustering methods for systems of complex processes inductive modeling are presented in [10]. However, it should be noted that, in spite of the successful results achieved in this area, an objective clustering model based on the analysis of clustering systems has no practical realization at the present time.

**The unsolved parts of the general problem** are the absence of the effective algorithms for division of initial data set into two equal power subsets and integrated criterion approach for evaluation of the clustering efficiency during their enumeration one by one.

**The aim of the paper** is the development of inductive model of objective clustering of objects based on the  $k$ -means clustering algorithm and evaluation of the stability of operation algorithm quality using of the noise data with different noise level.

## 3 MATERIALS AND METHODS

According to hereinbefore concept of complex systems inductive modeling the first step of data processing is the data normalization process. Data normalization was carried out for all columns by the formula (1):

$$x'_{ij} = \frac{x_{ij} - med_j}{\max(|x_{ij} - med_j|)}. \quad (1)$$

The choice of this normalization method is determined by the fact that as a result the set of data features in all columns had the same median with maximum of features variation range from –1 to 1, herewith the amount of data for each column which falls into the interquartile distance (50%), differs insignificantly.

Algorithm of the original set of objects  $\Omega$  division into 2 equal power non-intersecting subsets  $\Omega^A$  and  $\Omega^B$  consists the following steps [4, 9]:

1. Calculation of  $n \cdot (n-1)/2$  pairwise distances between the objects in the original sample of data;

2. Allocation of pairs of objects  $X_s, X_p$ , the distance between which is minimal:

$$d(X_s, X_p) = \min_{i,j} d(X_i, X_j)$$

3. Distribution of the object  $X_s$  to subset  $\Omega^A$ , and the object  $X_p$  to subset  $\Omega^B$ ;

4. Repetition of the steps 2 and 3 for the remaining objects. If the number of objects is odd, the last object is distributed into the two subsets.

The approach, outlined in [7], was taken as the basis to calculate the external balance criterion. Optimality criterion of regulated clustering was determined as minimum value of squared deviations sum between mass centers of appropriate clusters for different clustering (2):

$$CQ(Q, R) = \sum_{k=1}^q (c_k(Q) - c_k(R))^2 \rightarrow \min. \quad (2)$$

The mass center of  $k$  cluster in  $Q$  clustering was determined as the average of vectors attributes in this cluster (3):

$$c_k(Q) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}, j=1, \dots, m. \quad (3)$$

The absolute value of this criterion can be calculated for  $m$ -dimension feature space as follows (4):

$$CQ(Q, R) = \sqrt{\sum_{j=1}^m \left( \sum_{k=1}^q (c_k(Q) - c_k(R))^2 \right)^2} \rightarrow \min. \quad (4)$$

In the case of criterion normalization the formula (4) takes the form (5):

$$CQN(Q, R) = \sqrt{\sum_{j=1}^m \left( \frac{\sum_{k=1}^q (c_k(Q) - c_k(R))^2}{\sum_{k=1}^q (c_k(Q) + c_k(R))^2} \right)^2} \rightarrow \min. \quad (5)$$

To create the equal conditions for subsets  $\Omega^A$  and  $\Omega^B$  using  $k$ -means clustering algorithm, the same values are assigned to the centers of corresponding clusters for the different clustering at the initialization phase. The initial value of (4) criterion is zero in this case. The experiment has shown that on the subsequent iterations the criterion value increases at the first step, and then it varies monotonically to reach the saturation which corresponds to a sustainable clustering for the two equal power subsets. The relative change of the (4) criterion on two successive iterations vanishes in this case. Thereby, the external balance criterion can be represented as follows (6, 7):

$$CQN(Q, R) = \sqrt{\sum_{j=1}^m \left( \frac{\sum_{k=1}^q (c_k(Q) - c_k(R))^2}{\sum_{k=1}^q (c_k(Q) + c_k(R))^2} \right)^2} \rightarrow \text{opt.} \quad (6)$$

$$\frac{CQN_{i+1}(Q, R) - CQN_i(Q, R)}{CQN_i(Q, R)} \rightarrow 0. \quad (7)$$

The scheme of the inductive cluster analysis model based on the  $k$ -means algorithm is shown in Fig. 1. The implementation of this algorithm guesses the next steps:

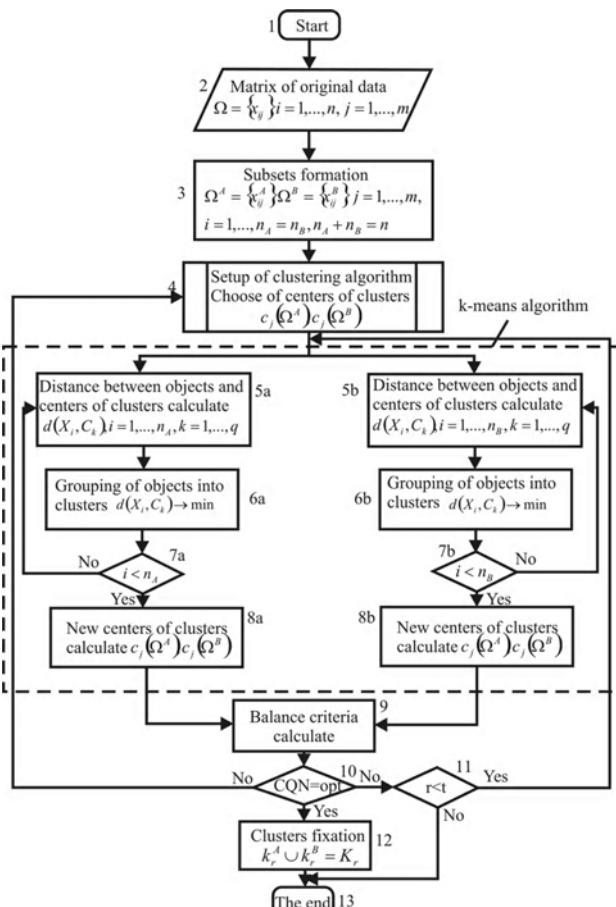


Figure 1 – Scheme of inductive cluster analysis model based on the  $k$ -means algorithm clustering

Step 1. Formation of the initial set  $\Omega$  of the objects. Data preprocessing (filtration and normalization). Presentation of data as a matrix  $n \times m$ ;

Step 2. Division of set  $\Omega$  into two equal power subsets in accordance with hereinbefore algorithm. These subsets  $\Omega^A$  and  $\Omega^B$  can be formally represented as follows:

$$\Omega^A = \{x_{ij}^A\}, \Omega^B = \{x_{ij}^B\}, j = 1, \dots, m, \\ i = 1, \dots, n_A = n_B, n_A + n_B = n.$$

Step 3. Setup of clustering procedure using  $k$ -means algorithm. Choose the number of clusters and setting the initial centers of clusters;

Step 4. Sequential calculation of Euclidean distances from the objects to the cluster centers for two clustering. Distribution of objects into clusters in accordance with the condition:

$$d(X_i, C_k) \rightarrow \min.$$

Step 5. Calculation of the new clusters centers by the formula (3);

Step 6. Calculation of the external balance criteria by the formulas (6) and (7);

Step 7. Fixation of obtained clustering when the conditions (6) and (7) are true. At against, if the current number of iterations less than maximum, go to step 4.

#### 4 EXPERIMENTS

Approbation of the proposed model working was carried out using the data “Aggregation” and “Compound” of the database of the Computing School in the Eastern Finland University [11]. Estimation of the algorithm stability to the noise component was carried out using the “Seeds” data [12], representing the researches of kernels of three kinds of wheat. Each kernel was characterized by seven attributes, herewith each group included 70 observations. Thus, the initial data matrix had the size:  $A = \{210 \times 7\}$ . Data normalization was carried out by the formula (1). Then the “white noise”, the amplitude of which varied from 2,5% to 50% of maximum of data scattering, was added to the data. Evaluation of the quality of algorithm operation was performed by counting the number of the correctly grouped objects. In order to compare the results, this problem was solved using the classical  $k$ -means algorithm, the fuzzy  $c$ -means algorithm and using the agglomerative hierarchical algorithm yet. The simulation was performed in the  $R$  software environment.

#### 5 RESULTS

The results of the operation algorithm for division of initial data set into two equal power subsets are shown in Fig. 2.

Fig. 3 shows the charts of external balance criteria calculated by formulas (7) and (8) dependence on the iterations number of the investigated data, herewith, 4 clusters are assigned for the “Compound” data and 7 – for “Aggregation” data – 7. The results of studied objects division into clusters are presented in Fig. 4. Fig. 5 shows the boxplots of unnormalized and normalized data. The charts of incorrectly distributed objects depending on level of noise component using the different clustering algorithms are shown in Fig. 6.

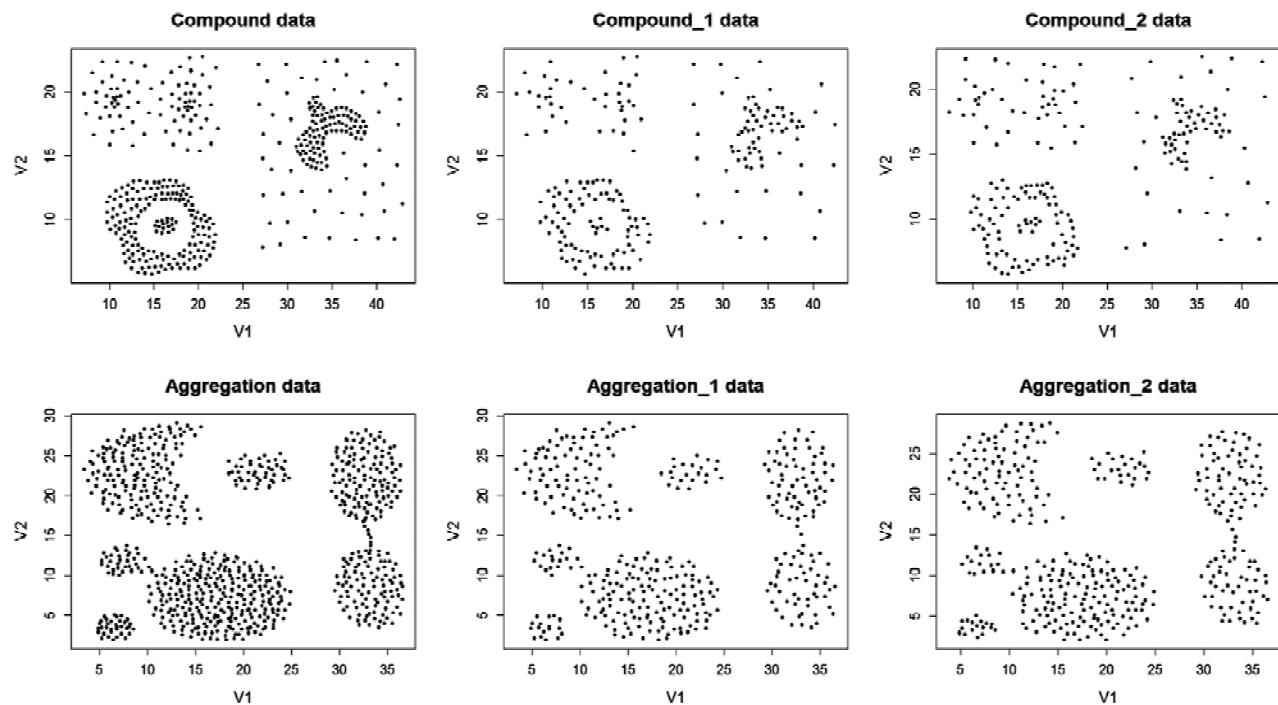


Figure 2 – Results of the operation algorithm for division of the initial data set into two equal power subsets

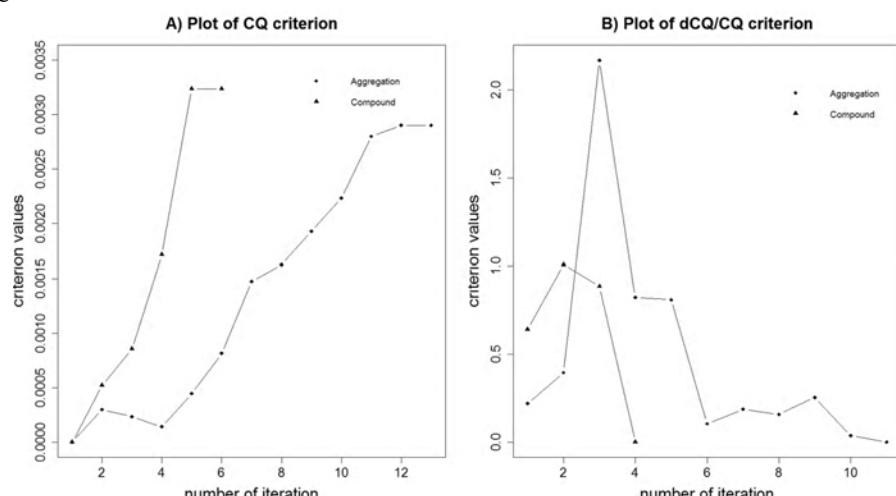


Figure 3 – Charts of external balance criteria for different iterations number

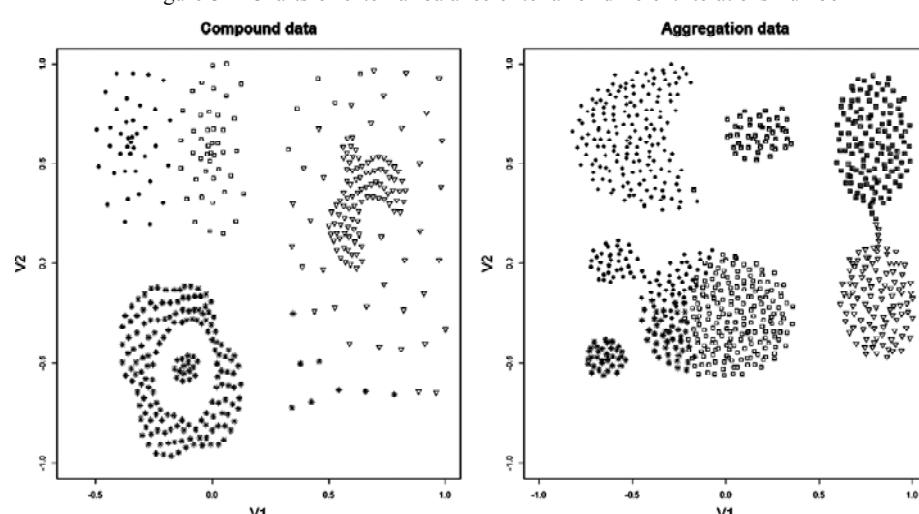


Figure 4 – Results of objective clustering inductive model operation

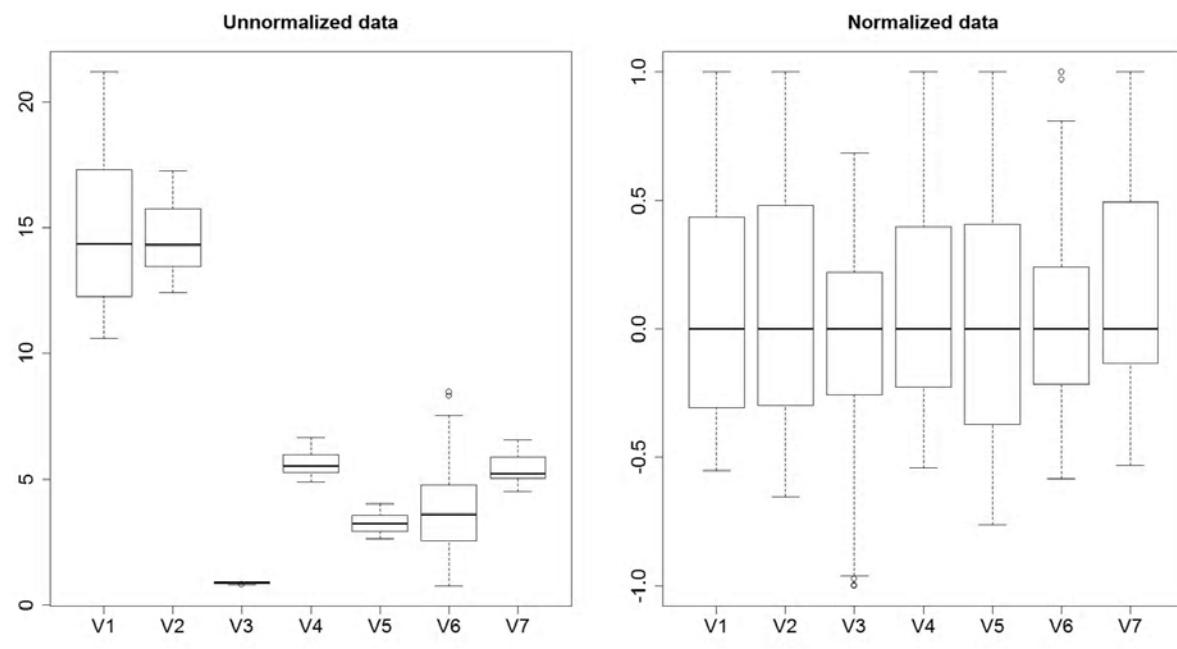


Figure 5 – Boxplots of unnormalized and normalized “Seeds” data

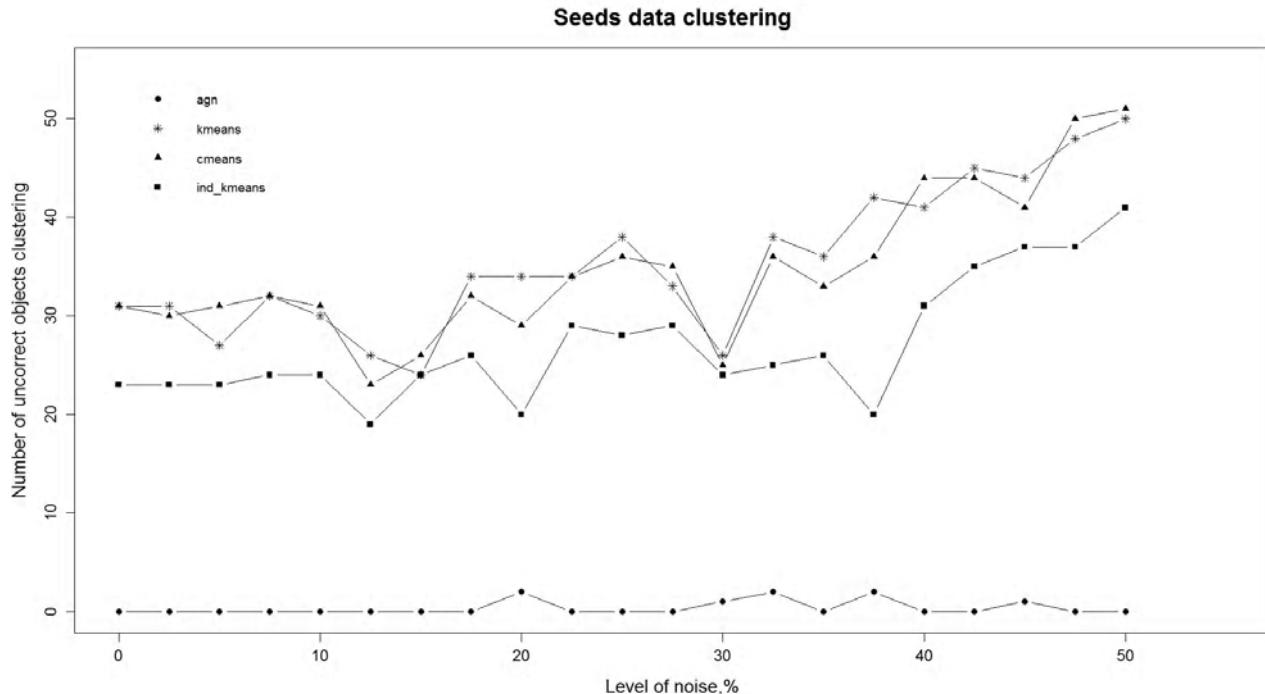


Figure 6 – Charts of incorrectly distributed objects depending on the level of noise component using different clustering algorithms

## 6 DISCUSSION

The analysis of Fig. 2 allows to conclude about the high efficiency of the algorithm operation. The obtained subsets have the similar structure with lower density of objects distribution in the feature space. Fig. 3 shows that the relative change of external balance criterion achieves zero at 4 and 11 iterations for the data “Aggregation” and “Compound” respectively.

Therefore, the relevant clustering are optimal at these levels in terms of criteria applied. As it can be seen from Fig. 4, objects of the “Compound” data were divided adequately into clusters. Low percentage of incorrect data can be

explained by the nature of the distribution. However, the surface, separating the clusters is rather distinct. The same conclusion can be done on the basis of the “Aggregation” data analysis. In this case some clusters intersection can be observed, however, the algorithm has divided the objects into clusters by surface fitting at feature space. Fig. 6 analysis allows to conclude that the inductive clustering model based on the k-means algorithm gives better results of objects division into clusters as compared to the classical k-means algorithm and the fuzzy c-means algorithm. Inductive clustering algorithm is more stable as compared to the k-means and fuzzy c-means algorithms for increase of

noise level to 10%. With a further increase of the noise level up to 40% the number of incorrectly distributed objects varies on either side. A further increase of the noise level contributes to a monotonic increase of the number of falsely identified objects. However, it should be noted that in this case the high efficiency of operation and the best stability to the noise of the agglomerative hierarchical clustering algorithm. It can be explained by the nature of this algorithm. The profiles of objects or the centers of clusters are compared using the Euclid distance during the clustering. Herewith, the noise presence has no significant effect to the result of profiles comparison in case of significant differences of the objects profiles in different clusters. Moreover, the advantage of this algorithm is the independence of the initial choice of cluster centers because the number of clusters in the initial state equals the number of objects studied. In this case the choice of optimal clustering is the main problem, because the analysis of dendrogram doesn't allow to draw the conclusion about the clustering quality at the chosen level. Therefore creation of a hybrid inductive model of objective clustering based on the agglomerative hierarchical clustering algorithm is reasonable.

## CONCLUSION

The hybrid model of objects clustering based on the methods of complex systems inductive modeling and  $k$ -means clustering algorithm is presented in the article. The methodology of inductive modeling to choice the optimal clustering during model operation through the implementation of objective criterial approach has been further developed. The "Compound" and "Aggregation" data of the database of the Computing School in the Eastern Finland University and the "Seeds" data, representing the researches of kernels of three kinds of wheat, were used as experimental ones. The algorithm for division of initial data set into two equal power subsets, which are then used in data clustering inductive model, has been further developed and practically implemented. The implementation of the proposed model was carried out using the R software environment. The results of simulation showed the high efficiency of proposed model operation. The algorithm has distributed the objects into the corresponding clusters adequately. The clusters intersection was not observed in the case of optimal distribution. The simulation of model operation using the "Seeds" data with different noise level was performed to estimate the model stability to the different data noise level. Level of noise was changed from 2,5% to 50% of maximum data variation. Clustering using the proposed inductive clustering model, the classic  $k$ -means algorithm, the fuzzy  $c$ -means algorithm and the agglomerative hierarchical clustering algorithm was carried out to compare

Бабічев С. А.<sup>1</sup>, Літвіненко В. І.<sup>2</sup>, Таїф М. А.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри інформатики, Університет Яна Євангеліста Пуркіне в Усті на Лабі, Чехія

<sup>2</sup>Д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри інформатики і комп'ютерних наук, Херсонський національний технічний університет, Херсон, Україна

<sup>3</sup>Аспірант кафедри інформатики і комп'ютерних наук, Херсонський національний технічний університет, Херсон, Україна

## ОЦІНКА СТІЙКОСТІ ІНДУКТИВНОЇ МОДЕЛІ КЛАСТЕРИЗАЦІЇ ОБ'ЄКТІВ НА ОСНОВІ АЛГОРИТМУ $K$ -СЕРЕДНІХ ПРИ РІЗНИХ РІВНЯХ ШУМУ

У статті представлена індуктивну модель об'єктивної кластеризації об'єктів на основі алгоритму кластеризації  $k$ -середніх. Запропоновано і практично реалізовано алгоритм розподілу множини вихідних даних на дві рівнопотужних підмножини. У якості зовніш-

the results of the experiment. The results of the simulation have shown better quality and stability of inductive  $k$ -means algorithm as compared to the classic  $k$ -means and the fuzzy  $c$ -means algorithms. However, the agglomerative hierarchical clustering algorithm has shown the best results in terms of clustering quality and stability to the noise. Therefore, the creation of a hybrid inductive model of objective clustering based on the agglomerative hierarchical clustering algorithm is the perspectives of further authors' researches.

## ACKNOWLEDGEMENTS

The work is carried out within the framework of the state budget scientific researches theme of Kherson National Technical University "Synthesis of Hybrid Evolutionary Algorithms and Methods for Modeling of Gene Regulatory Networks" (State Registration Number: 0116U002840).

## REFERENCES

1. Івахненко О. Г. Метод групового урахування аргументів – конкурент методу стохастичної апроксимації / О. Г. Івахненко // Автоматика. – 1968. – № 3. – С. 58–72.
2. Івахненко А. Г. Индуктивный метод самоорганизации моделей сложных систем / А. Г. Ивахненко. – К. : Наук. думка, 1982. – 296 с.
3. Івахненко А. Г. Объективная кластеризация на основе теории самоорганизации моделей / А. Г. Ивахненко // Автоматика. – 1987. – №5. – С. 6–15.
4. Madala H. R. Inductive Learning Algorithms for Complex Systems Modeling / H. R. Madala, A. G. Ivakhnenko. – CRC Press, 1994. – 365 p.
5. Степашко В. С. Теоретические аспекты МГУА как метода индуктивного моделирования / В. С. Степашко // Управляющие системы и машины (УСиМ). – 2003. – № 2. – С. 31–38.
6. Степашко В. С. Елементи теорії індуктивного моделювання – Стан та перспективи розвитку інформатики в Україні : монографія / Колектив авторів / В. С. Степашко. – К. : Наукова думка, 2010. – 1008 с. – С. 471–486.
7. Осипенко В. В. Два підходи до розв'язання задачі кластерізації у широкому сенсі з позицій індуктивного моделювання / В. В. Осипенко // Енергетика і Автоматика. – 2014. – № 1. – С. 83–97.
8. Osypenko V. V. The Methodology of Inductive System Analysis as a Tool of Engineering Researches Analytical Planning / V. V. Osypenko, V. M. Reshetjuk // Ann. Warsaw Univ. Life Sci. – SGGW. – 2011. – № 58. – P. 67–71.
9. Саричева Л. В. Объективный кластерный анализ данных на основе метода группового учета аргументов / Л. В. Саричева // Проблемы управления и автоматики. – 2008. – № 2. – С. 86–104.
10. The Using of Bioclustering Techniques in Inductive Modeling Systems of Biological Processes / [S. Babichev, V. Osypenko, M. A. Taif, V. Lytvynenko] // Inductive modeling of complex systems. – 2015. – № 7. – P. 5–14.
11. <https://cs.joensuu.fi/sipu/datasets/>
12. <http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/seeds>

Article was submitted 15.08.2016.  
After revision 09.06.2016.

нього критерію балансу запропоновано використовувати різницю між центрами мас відповідних кластерів у різних кластеризаціях. Апробація роботи запропонованої моделі проводилася з використанням даних «Compound» та «Aggregation» бази даних обчислювальної школи Східно-Фінського університету. Представлені дослідження з оцінки стійкості моделі до шумової компоненті з використанням даних «Seeds». Для порівняння результатів експерименту були використані алгоритми  $k$ -середніх, с-середніх, індуктивний алгоритм  $k$ -середніх, а також алгоритм агломеративної ієрархічної кластеризації. За результатами моделювання визначено шляхи подальшого вдосконалення запропонованої моделі з метою підвищення об'єктивності кластеризації досліджуваних даних.

**Ключові слова:** індуктивне моделювання, кластеризація, алгоритм  $k$ -середніх, зовнішній критерій балансу.

Бабичев С. А.<sup>1</sup>, Литвиненко В. И.<sup>2</sup>, Таиф М. А.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры информатики, Университет Яна Евангелиста Пуркине в Усти на Лабе, Чехия

<sup>2</sup>Д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедры информатики и компьютерных наук, Херсонский национальный технический университет, Херсон, Украина

<sup>3</sup>Аспирант кафедры информатики и компьютерных наук, Херсонский национальный технический университет, Херсон, Украина

## ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ ИНДУКТИВНОЙ МОДЕЛИ КЛАСТЕРИЗАЦИИ ОБЪЕКТОВ НА ОСНОВЕ АЛГОРИТМА $k$ -СРЕДНИХ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ УРОВНЯХ ШУМА

В статье представлена индуктивная модель объективной кластеризации объектов на основе алгоритма кластеризации  $k$ -средних. Предложен и практически реализован алгоритм деления множества исходных данных на два равномощных подмножества. В качестве внешнего критерия баланса предложено использовать разницу между центрами масс соответствующих кластеров в различных кластеризациях. Апробация работы предложенной модели производилась с использованием данных «Compound» and «Aggregation» базы данных вычислительной школы Восточно-Финского университета. Представлены исследования по оценке устойчивости модели к шумовой компоненте с использованием данных «Seeds». Для сравнения результатов эксперимента были использованы алгоритмы  $k$ -means, C-means, индуктивный алгоритм  $k$ -means, а также алгоритм агломеративной иерархической кластеризации. По результатам моделирования определены пути дальнейшего усовершенствования предложенной модели с целью повышения объективности кластеризации исследуемых данных.

**Ключевые слова:** индуктивное моделирование, кластеризация, алгоритм  $k$ -средних, внешний критерий баланса.

## REFERENCES

1. Ivahnenko O.G. Metod grupovogo urahuvannya argumentiv – konkurent metodu stohastichnoyi aproksimatsiyi, *Avtomatika*, 1968, No. 3, pp. 58–72.
2. Ivahnenko A. G. Induktivnyj metod samoorganizacii modelej slozhnyh sistem. Kiev, Nauk. dumka, 1982, 296 p.
3. Ivahnenko A. G. Objektivnaja klasterizacija na osnove teorii samoorganizacii modelej, *Avtomatika*, 1987, No. 5, pp. 6–15.
4. Madala H. R., Ivakhnenko A. G. Inductive Learning Algorithms for Complex Systems Modeling. CRC Press, 1994, 365 p.
5. Stepashko V. S. Teoreticheskie aspekty MGUA kak metoda induktivnogo modelirovaniya, *Upravljajushchie sistemy i mashiny (USiM)*, 2003, No. 2, pp. 31–38.
6. Stepashko V. S. Elementi teoriyi induktivnogo modelyuvannya – Stan ta perspektivi rozvitku informatiki v Ukrayini : monografiya. Kolektiv avtoriv, 2010, 1008 p., pp. 471–486.
7. Osipenko V. V. Dva pidhodi do rozvyazannya zadachi klasterizatsiyi u shirokomu sensi z pozitsiy induktivnogo modelyuvannya, *Energetika i Avtomatika*, 2014, No. 1, pp. 83–97.
8. Osypenko V. V., Reshetjuk V. M. The Methodology of Inductive System Analysis as a Tool of Engineering Researches Analytical Planning, *Ann. Warsaw Univ. Life Sci, SGW*, 2011, No. 58, pp. 67–71.
9. Sarycheva L. V. Objektivnyj klasternyj analiz dannyh na osnove metoda gruppovogo ucheta argumentov, *Problemy upravlenija i avtomatiki*, 2008, No. 2, pp. 86–104.
10. Babichev S., Osypenko V., Taif M. A., Lytvynenko V. The Using of Biclustering Techniques in Inductive Modeling Systems of Biological Processes, *Inductive modeling of complex systems*, 2015, No. 7, pp. 5–14.
11. <https://cs.joensuu.fi/sipu/datasets/>
12. <http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/seeds>

УДК 004.272.26: 004.93

Олійник А. О.<sup>1</sup>, Скрупський С. Ю.<sup>2</sup>, Субботін С. О.<sup>3</sup>, Благодар'єв А. Ю.<sup>4</sup>, Гофман Є. О.<sup>5</sup>

<sup>1</sup>Канд. техн. наук, доцент кафедри програмних засобів, Запорізький національний технічний університет, Запоріжжя, Україна

<sup>2</sup>Канд. техн. наук, доцент кафедри комп'ютерних систем та мереж, Запорізький національний технічний університет, Запоріжжя, Україна

<sup>3</sup>Д-р техн. наук, завідувач кафедри програмних засобів, Запорізький національний технічний університет, Запоріжжя, Україна

<sup>4</sup>Аспірант кафедри програмних засобів, Запорізький національний технічний університет, Запоріжжя, Україна

<sup>5</sup>Канд. техн. наук, с.н.с. кафедри програмних засобів, Запорізький національний технічний університет, Запоріжжя, Україна

## ПЛАНУВАННЯ РЕСУРСІВ ПАРАЛЕЛЬНОЇ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ПРИ СИНТЕЗІ НЕЙРО-НЕЧІТКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОБРОБКИ ВЕЛИКИХ ДАНИХ

Вирішено задачу планування ресурсів паралельних комп'ютерних систем при синтезі нейро-нечітких мереж. Об'єкт дослідження – процес синтезу нейро-нечітких моделей. Предметом дослідження є методи планування ресурсів паралельних комп'ютерних систем. Мета роботи полягає в побудові моделі планування ресурсів паралельних комп'ютерних систем, що здійснюють вирішення прикладних завдань на основі паралельного методу синтезу нейро-нечітких мереж. Запропоновано модель планування ресурсів паралельних комп'ютерних систем при синтезі нейро-нечітких мереж. Синтезована модель враховує тип комп'ютерної системи, кількість процесів, на яких виконується завдання, пропускну здатність мережі передачі даних, параметри використовуваного математичного забезпечення (кількість можливих рішень, що обробляються в процесі роботи методу, частки рішень, що генеруються на кожній ітерації стохастичного пошуку за допомогою застосування операторів схрещування і мутації), а також параметри розв'язуваної прикладної задачі (кількість спостережень і кількість ознак в заданій множині даних, що описує результати спостережень за досліджуваним об'єктом або процесом). Розроблено програмне забезпечення, що реалізує синтезовану модель планування ресурсів. Виконано експерименти, що підтверджують адекватність запропонованої моделі. Результати експериментів дозволяють рекомендувати застосування розробленої моделі на практиці.

**Ключові слова:** вибірки даних, паралельні обчислення, планування ресурсів, нейро-нечітка модель, нейронна мережа.

### НОМЕНКЛАТУРА

CPU – Central Processing Unit;

GPU – Graphical Processing Unit;

$M$  – кількість ознак в множині спостережень  $S$ ;

$N_{pr}$  – кількість процесів, на яких виконується завдання;

$N_\chi$  – кількість можливих рішень, з якими операє система при синтезі нейро-нечітких мереж;

$Q$  – кількість спостережень в заданій множині спостережень  $S$ ;

$S$  – навчальна вибірка;

$T_{NN}$  – значення виходу нейромережової моделі;

$V$  – пропускна здатність середовища передачі даних,

Гб / с;

$w$  – матриця вагових коефіцієнтів;

$w_0$  – порогове значення функції  $\Phi(w; x)$ ;

$|x|$  – кількість аргументів функції  $\Phi(w; x)$ ;

$\beta$  – частка рішень, що генеруються на кожній ітерації стохастичного пошуку за допомогою застосування оператора схрещування;

$\gamma$  – частка рішень, що генеруються на кожній ітерації стохастичного пошуку за допомогою застосування оператора мутації;

$\psi_{\mu,\rho}$  – функція активації  $\rho$ -го нейрона  $\mu$ -го шару;

$\varphi_{\mu,\rho}$  – дискримінантна функція  $\rho$ -го нейрона  $\mu$ -го шару.

### ВСТУП

Нейро-нечіткі мережі (ННМ) широко застосовуються при вирішенні практичних задач розпізнавання, діаг-

ностування, контролю якості продукції та ін. [1–7]. У роботах [8–10] запропоновано метод синтезу ННМ на основі паралельних обчислень, що дозволяє вирішувати прикладні задачі, які передбачають необхідність побудови моделей на основі різних вибірок даних [8]. Виконання цього методу вимагає великих витрат часу та обчислювальних ресурсів, що обумовлює необхідність застосування паралельних комп'ютерних систем [11–14]. Використання ресурсів для паралельних обчислень на кластерах CPU і графічних процесорах (GPU) є досить дорогим і не доступним для більшості користувачів [11, 12]. Для ефективного застосування паралельних комп'ютерних систем виконують попереднє планування ресурсів, що може бути здійснено за допомогою методів математичного моделювання поведінки системи при вирішенні відповідних задач [14–17]. При цьому доцільно застосовувати методи нейромережевого моделювання [18–26], оскільки вони дозволяють виявляти нелінійні залежності між характеристиками паралельної комп'ютерної системи, параметрами використовуваного математичного забезпечення, аргументами розв'язуваної в системі прикладної задачі, та часом, затрачуваним системою на вирішення прикладної задачі.

Метою роботи є побудова моделі планування ресурсів паралельних комп'ютерних систем, що здійснюють вирішення прикладних задач на основі паралельного методу синтезу нейро-нечітких мереж [9].

### 1 ПОСТАНОВА ЗАВДАННЯ

При плануванні ресурсів паралельної системи важливими характеристиками, від яких залежить її ефек-

тивність і швидкість одержання результату, є наступні групи параметрів: технічні характеристики паралельної системи, параметри використовуваного програмного (математичного) забезпечення, особливості розв'язуваної прикладної задачі [8–10].

Основними характеристиками паралельної системи, що впливають на час вирішення практичної задачі, є:

- $x_1$  – тип системи type (клuster CPU або GPU);
- $x_2$  – кількість процесів, на яких виконується задача

$N_{pr}$ ;

- $x_3$  – пропускна здатність середовища передачі даних  $V$ , Гб/с.

Серед основних параметрів використовуваного математичного забезпечення (у даному випадку, методу синтезу ННМ [8]) виділимо такі:

- $x_4$  – кількість можливих рішень  $N_\chi$  [8], з якими операція система на кожній ітерації методу;
- $x_5$  – частка рішень  $\beta$ , що генеруються на кожній ітерації стохастичного пошуку за допомогою застосування оператора схрещування [8–10];
- $x_6$  – частка рішень  $\gamma$ , що генеруються на кожній ітерації стохастичного пошуку за допомогою застосування оператора мутації [8–10].

Як параметри прикладної задачі, що істотно впливають на швидкість роботи паралельної системи при синтезі ННМ, доцільно використовувати:

- $x_7$  – кількість спостережень  $Q$  у заданій множині спостережень  $S$ ;
- $x_8$  – кількість ознак  $M$  у множині спостережень  $S$ .

Таким чином, для оцінювання часу роботи  $t$  паралельної комп'ютерної системи при синтезі ННМ необхідно побудувати модель виду (1):

$$t = t(type, N_{pr}, V, N_\chi, \beta, \gamma, Q, M), \quad (1)$$

яка дозволяє виконувати прогнозування витраченого на виконання паралельного методу синтезу ННМ часу в залежності від характеристик системи, параметрів математичного забезпечення та особливостей розв'язуваної прикладної задачі.

## 2 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

У роботах [27, 28] запропоновано моделі планування ресурсів паралельної обчислювальної системи, що дозволяють оцінити час її роботи при синтезі нейро-нечітких мереж на основі методу [8].

Таблиця 1 – Характеристики оброблюваних наборів даних

№ з/п	Назва задачі	Тип даних	Кількість спостережень $Q$	Кількість ознак $M$
1	Pypertensive patient condition [10]	цілі, дійсні, якісні	2418	24
2	Auto MPG	дійсні, якісні	398	8
3	Automobile	цілі, дійсні, якісні	205	26
4	Computer Hardware	цілі	209	9
5	Housing	цілі, дійсні, якісні	506	14
6	Servo	цілі, якісні	167	4
7	Solar Flare	якісні	1389	10
8	Forest Fires	дійсні	517	13
9	Concrete Compressive Strength	дійсні	1030	9
10	Communities and Crime	дійсні	1994	128
11	Parkinsons Telemonitoring	цілі, дійсні	5875	26
12	Energy efficiency	цілі, дійсні	768	8

У синтезованій в роботі [27] моделі враховувалися лише 4 параметри (тип системи, кількість процесів, на яких виконується задача, пропускна здатність мережі, а також кількість можливих рішень  $N_\chi$ ). Крім того, важливо відзначити, що модель [27] була побудована за даними лише однієї навчальної вибірки (при вирішенні задачі побудови ННМ для індивідуального прогнозування стану хворого гіпертонічною хворобою [10]) і, відповідно, могла бути використана лише при вирішенні подібного класу задач.

У роботі [28] додатково враховувалися параметри прикладної задачі, що істотно впливають на швидкість роботи паралельної системи при синтезі ННМ (кількість спостережень і число ознак у заданій множині спостережень  $S$ ). Однак така модель також характеризувалася деякими недоліками:

- не були враховані деякі важливі параметри паралельного методу синтезу ННМ [8], що істотно впливають на швидкість пошуку оптимального рішення (частки рішень, що генеруються на кожній ітерації стохастичного пошуку за допомогою застосування операторів схрещування і мутації);
- синтезована модель містила всі можливі прямонаправлені зв'язки між нейронами.

Наявність зазначених недоліків моделей планування ресурсів, синтезованих у роботах [27, 28], обумовлює необхідність побудови моделі, яка є досить простою для сприйняття і враховує основні технічні характеристики паралельної системи, параметри використовуваного програмного (математичного) забезпечення та особливості розв'язуваної прикладної задачі.

## 3 МАТЕРІАЛИ ТА МЕТОДИ

Розглянутий метод [8–10] був застосований на кластері CPU та на GPU при обробці даних з публічного репозиторію [29], а також при вирішенні задачі індивідуального прогнозування стану здоров'я хворих артеріальною гіпертонією [10]. Характеристики оброблюваних наборів даних наведено в табл. 1.

У результаті обробки даних [10, 29] було сформовано навчальну вибірку (2), що містить 2064 результати виконання методу, кожний з який характеризувався вісімома ознаками:

$$D = \langle X, T \rangle, \quad (2)$$

где  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ ,  $x_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iN}\}$ ,  $N = 2064$ ,  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_N\}$ .

Таким чином навчальна вибірка являла собою таблицю чисел, що складається з 2064 рядків і дев'яти стовпців, які містять значення восьми вхідних ознак і одного вихідного (часу роботи методу) для кожного випадку застосування розглянутого методу в паралельній системі. Фрагмент навчальної вибірки наведено у табл. 2.

Для виключення впливу різного порядку значень ознак на синтезовану модель виконувалося нормування ознак, тобто приведення діапазону їхніх значень до єдиного інтервалу [0; 1] за формулою (3):

$$x_{ij\text{ n}} = \frac{x_{ij} - x_{i\text{ min}}}{x_{i\text{ max}} - x_{i\text{ min}}}, \quad (2)$$

де  $i = 1, 2, \dots, 8$ ;  $j = 1, 2, \dots, 2064$ .

Як базис для побудови моделі залежності виду (1) використовувалися нейронні мережі прямого поширення, що дозволяють апроксимувати складні нелінійні залеж-

ності з високою точністю. Модель (1) синтезувалася у виді тришарового персептрону [18, 22], перший шар якого містив три нейрони, другий шар – чотири нейрони, третій шар – один нейрон. Усі нейрони мали сигмоїдну функцію активації (4):

$$\psi(\varphi) = \frac{1}{1 + e^{-\varphi}}, \quad (3)$$

де  $\varphi = \Phi(w; x)$ .

У якості дискримінантної функції нейронів використовувалася зважена сума (5):

$$\varphi(w; x) = w_0 + \sum_{i=1}^{|x|} w_i x_i, \quad (4)$$

де  $w_i$  визначає вагу  $i$ -го вхідного параметру  $x_i$  у функції  $\varphi(w; x)$ .

Таблиця 2 – Фрагмент навчальної вибірки

type	$N_{pr}$	Значення ознак						$T$
		$V$	$N_\chi$	$\beta$	$\gamma$	$Q$	$M$	
0	1	20	50	0,85	0,1	2418	24	101,18
0	8	20	50	0,83	0,11	2418	24	18,09
0	32	1	100	0,58	0,3	2418	24	51,65
1	100	32	50	0,58	0,31	2418	24	30,33
1	180	64	100	0,51	0,43	2418	24	59,44
1	260	32	100	0,53	0,41	2418	24	67,54
0	16	1	50	0,74	0,15	209	9	14,90
0	2	20	100	0,7	0,18	209	9	106,42
1	60	32	50	0,58	0,31	209	9	33,83
1	100	64	100	0,52	0,42	209	9	48,41
0	4	1	50	0,77	0,14	506	14	47,59
0	18	20	100	0,67	0,2	506	14	18,87
1	200	32	50	0,57	0,33	506	14	28,52
1	240	64	100	0,51	0,44	506	14	56,43
0	8	1	50	0,76	0,14	1389	10	29,93
0	14	20	100	0,67	0,2	1389	10	24,79
1	140	32	50	0,57	0,32	1389	10	27,47
1	100	32	100	0,54	0,38	1389	10	61,56
0	16	20	50	0,81	0,11	1994	128	10,42
0	1	1	50	0,77	0,13	1994	128	176,78
1	80	32	50	0,58	0,31	1994	128	41,39
1	100	64	50	0,56	0,34	1994	128	28,07
0	6	20	50	0,84	0,1	5875	26	27,11
0	22	1	50	0,72	0,16	5875	26	19,98
0	32	20	100	0,64	0,23	5875	26	23,75
1	120	32	50	0,57	0,32	5875	26	33,78
1	180	32	100	0,53	0,39	5875	26	74,78
...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	240	64	100	0,51	0,44	5875	26	71,77

Таким чином, структура синтезованої тришарової нейромоделі  $T_{NN}$  може бути представлена в такий спосіб (6):

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{NN} = \Psi(3,1) \left( \Phi(3,1) \left( w_{(3,1)}; \Psi(2) \right) \right); \\ \Psi(2) = \{\Psi(2,1), \Psi(2,2), \Psi(2,3), \Psi(2,4)\}; \\ \Psi(2,k) = \Psi(2,k) \left( \Phi(2,k) \left( w_{(2,k)}; \Psi(1) \right) \right), k = 1, 2, 3, 4; \\ \Psi(1) = \{\Psi(1,1), \Psi(1,2), \Psi(1,3)\}; \\ \Psi(1,l) = \Psi(1,l) \left( \Phi(1,l) \left( w_{(1,l)}; X \right) \right), l = 1, 2, 3. \end{array} \right. \quad (5)$$

Для побудови нейромоделі та визначення значень її параметрів (вагових коефіцієнтів і зсувів кожного нейрону) на її входи подавалися значення пронормованих ознак, на вихід – значення часу виконання методу синтезу нейро-нечітких мереж у паралельній системі. Як цільова функція при навчанні нейромоделі використовувався мінімум середньоквадратичної помилки  $E$ .

З метою виключення з моделі  $t = t(type, N_{pr}, V, N_\chi, \beta, \gamma, Q, M)$  надлишкових зв'язків між нейроелементами, навчання проводилося за допомогою методу структурно-параметричного синтезу нейромоделей на основі еволюційного підходу [8, 9]. Прийнятним вважалося досягнення середньоквадратичної помилки порядку  $10^{-4}$ .

Після підстановки значень вагових коефіцієнтів і зсувів у (6) з урахуванням функції активації (4) та дискримінантної функції (5) одержуємо математичний опис синтезованої нейромережевої моделі (7), що описує залежності між характеристиками системи, у якій здійснюється синтез нейро-нечітких мереж, параметрами досліджуваного методу та часом, витраченим системою на виконання синтезу мереж. Графічну інтерпретацію синтезованої нейромоделі наведено на рис. 1. Значення середньоквадратичної помилки синтезованої моделі склало  $3,3 \times 10^{-4}$ , що є прийнятним для подібного роду задач.

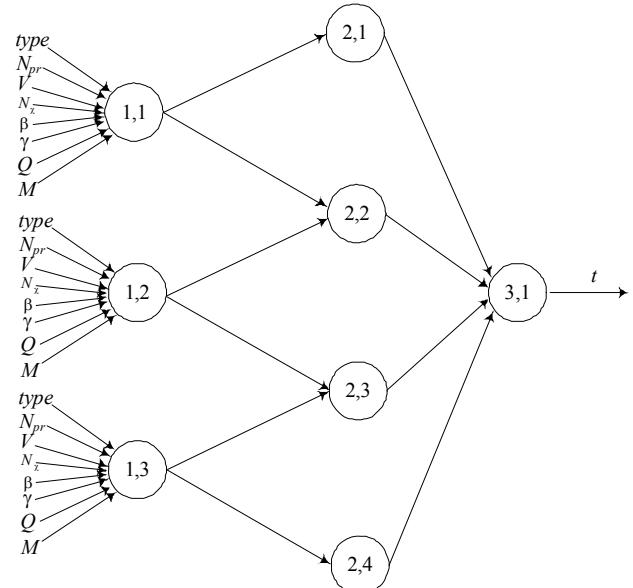


Рисунок 1 – Синтезована нейромережева модель

Таким чином, побудована нейромережева модель являє собою ієрархічну структуру, що містить нейроподібні обчислювальні елементи, і дозволяє оцінювати час, необхідний паралельній комп’ютерній системі для синтезу ННМ при моделюванні складних об’єктів і процесів.

#### 4 ЕКСПЕРИМЕНТИ

Для виконання експериментального дослідження запропонованої нейромережевої моделі використані такі комп’ютерні системи:

– кластер Інституту проблем моделювання в енергетиці імені Г. Е. Пухова НАН України (ІПМЕ) м. Київ: процесори Intel Xeon 5405, оперативна пам’ять –  $4 \times 2$  ГБ DDR-2 на кожен вузол, комунікаційне середовище InfiniBand 20Гб/з, middleware Torque і OMPI;

– кластер Запорізького національного технічного університету (ЗНТУ) м. Запорожжя: процесори Intel E3200,

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{NN} = \Psi(3,1) = \left( 1 + e^{-(43,31 - 52,55\Psi(2,1) - 76,96\Psi(2,2) - 5,58\Psi(2,3) + 34,87\Psi(2,4))} \right)^{-1}; \\ \Psi(2,1) = \left( 1 + e^{(-28,84 - 0,58\Psi(1,1))} \right)^{-1}; \\ \Psi(2,2) = \left( 1 + e^{-(29,93 - 92,2\Psi(1,1) - 95,32\Psi(1,2))} \right)^{-1}; \\ \Psi(2,3) = \left( 1 + e^{-(8,75 - 19,75\Psi(1,2) + 5,95\Psi(1,3))} \right)^{-1}; \\ \Psi(2,4) = \left( 1 + e^{-(6,44 + 9,67\Psi(1,3))} \right)^{-1}; \\ \Psi(1,1) = \left( 1 + e^{(-3,71 + 7,29type - 10,31N_{pr} - 6,46V + 3,97N_\chi + 4,3\beta - 8,59\gamma - 0,06Q - 0,01M)} \right)^{-1}; \\ \Psi(1,2) = \left( 1 + e^{(-0,41 + 1,02type - 0,84N_{pr} - 0,02V + 0,11N_\chi + 1,29\beta + 0,83\gamma + 0,04Q + 0,01M)} \right)^{-1}; \\ \Psi(1,3) = \left( 1 + e^{(0,6 + 4,51type - 3,7N_{pr} + 0,89V + 0,48N_\chi + 5,09\beta - 0,2\gamma - 0,08Q - 0,02M)} \right)^{-1}. \end{array} \right. \quad (6)$$

оперативна пам'ять 1 ГБ DDR-2 на кожен вузол, комунікаційне середовище Gigabit Ethernet 1 Гб/с, middleware Torque і MPICH;

- GPU NVIDIA GTX 285+ 240 ядер CUDA;
- GPU NVIDIA GTX 960 1024 ядра CUDA.

В експериментах кількість процесів  $x_2$ , на яких використовувався метод, варіювалося від 1 до 32 для кластерів та від 60 до 260 для GPU. Пропускна здатність мережі  $x_3$  – від 1 до 20 Гб/с, кількість можливих рішень на етапі ініціалізації методу  $N_\chi$  – від 50 до 100. Частка рішень  $\beta$ , що генеруються на кожній ітерації стохастичного пошуку за

допомогою застосування оператора скрещування,  $x_5$  – від 0,51 до 0,85, частка рішень  $\gamma$ , створюваних на кожній ітерації стохастичного пошуку за допомогою застосування оператора мутації,  $x_6$  – від 0,1 до 0,45. Для проведення експериментів було розроблено програмне забезпечення мовою С з застосуванням бібліотеки MPI [30].

## 5 РЕЗУЛЬТАТИ

Результати експериментів на кластерах ЗНТУ (задача № 4 у табл.1,  $N_\chi=50$ ) та ПМЕ (задача № 5 у табл. 1,  $N_\chi=100$ ) наведено на рис. 2 і рис. 3, відповідно. Рис. 4 демонструє

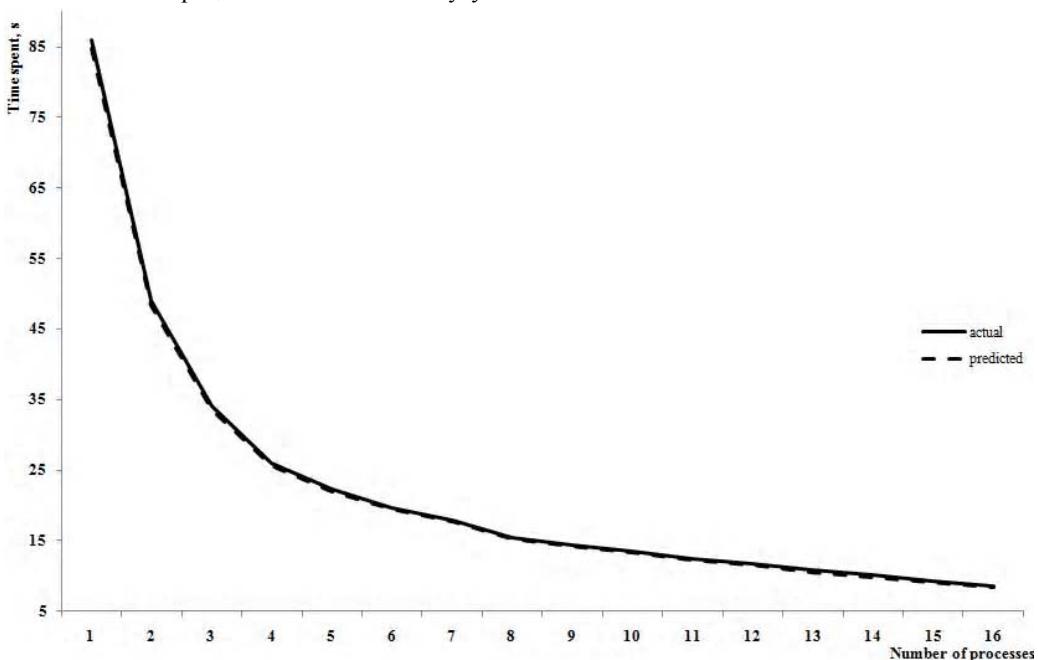


Рисунок 2 – Результати експериментів на кластері ПМЕ (задача № 4 у табл.1,  $N_\chi=100$ )

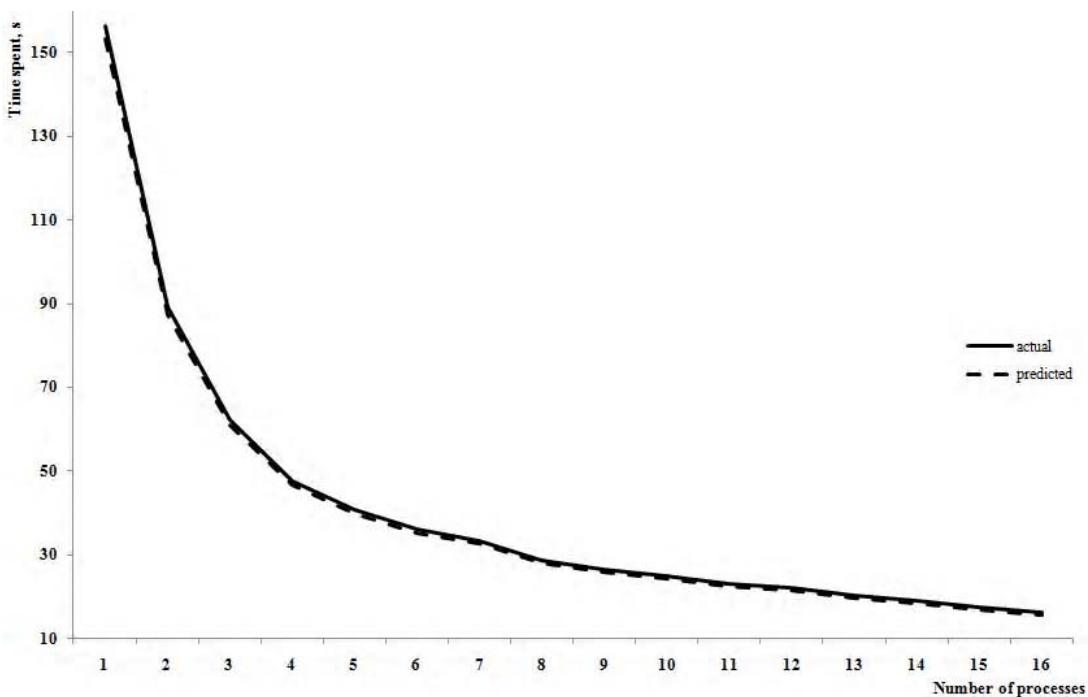


Рисунок 3 – Результати експериментів на кластері ЗНТУ (задача № 5 у табл. 1,  $N_\chi=50$ )

експериментальну перевірку запропонованої моделі на GPU NVIDIA GTX 960 у задачі № 11 з табл. 1, при цьому  $N_\chi=100$ . Рис. 5 демонструє результати експериментів на GPU NVIDIA GTX 285+ у вирішенні задачі № 10 з  $N_\chi=50$ . Суцільною лінією зображенено час, фактично витрачений

системою на виконання паралельного методу синтезу нейро-нечітких мереж [8], а пунктирною лінією – розрахунковий час за допомогою запропонованої моделі.

У таблиці 3 наведено значення середньоквадратичної помилки (mse) запропонованої моделі в порівнянні з моделями [27] і [28].

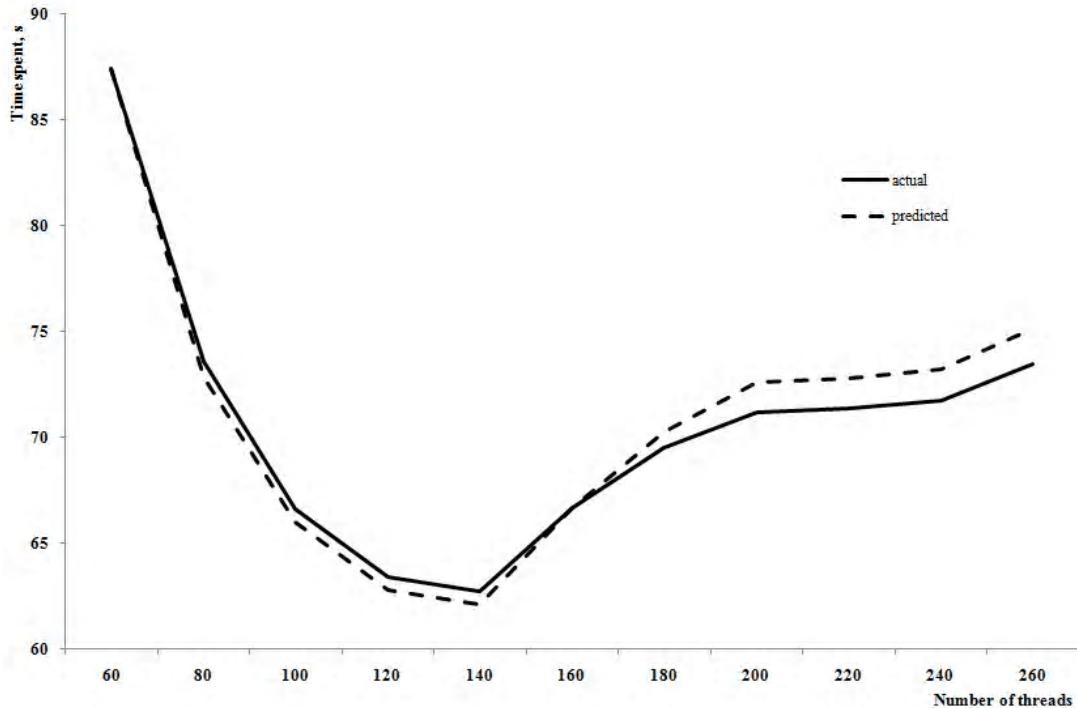


Рисунок 4 – Результати експериментів на GPU NVIDIA GTX 960 (задача № 11 у табл.1,  $N_\chi=100$ )

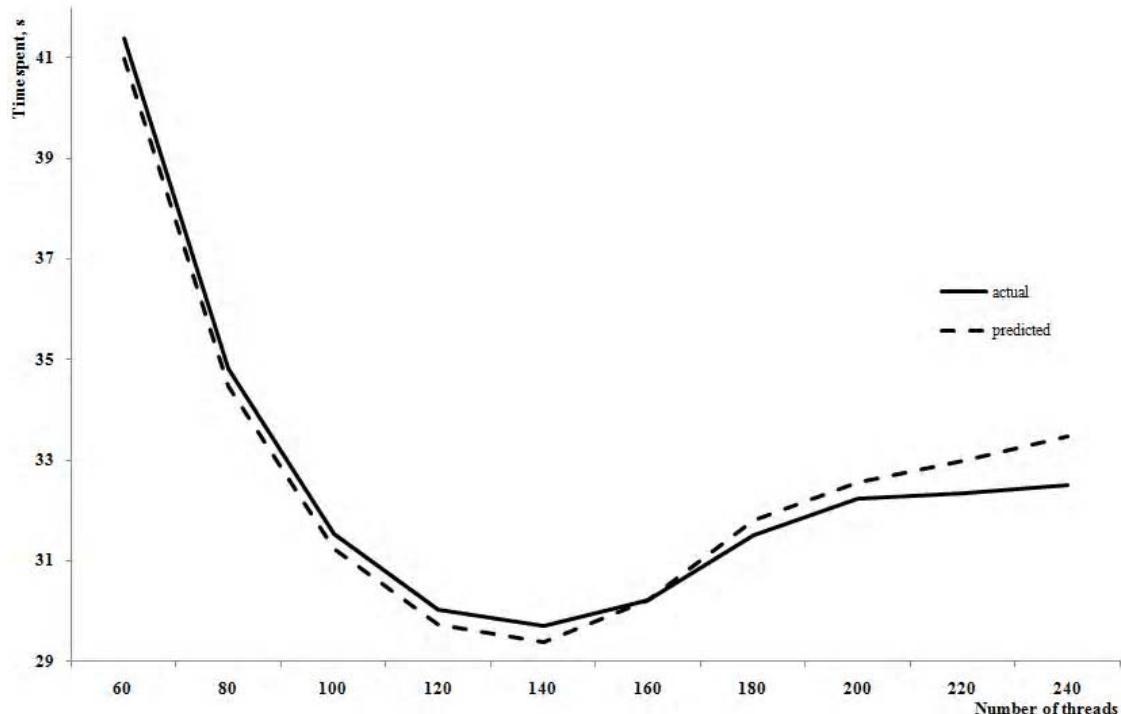


Рисунок 5 – Результати експериментів на GPU NVIDIA GTX 285+ (задача № 10 у табл. 1,  $N_\chi=50$ )

Таблиця 3 – Значення середньоквадратичних помилок розглянутих моделей

Модель Задача	MSE запропонованої моделі (8 параметрів)	MSE моделі [27] (6 параметрів)	MSE моделі [28] (4 параметри)
Computer Hardware (на кластері)	$2,05 \times 10^{-6}$	$1,03 \times 10^{-5}$	$2,74 \times 10^{-5}$
Housing (на кластері)	$8,29 \times 10^{-7}$	$6,61 \times 10^{-5}$	$9,32 \times 10^{-5}$
Communities and Crime (на GPU)	$3,32 \times 10^{-5}$	$1,67 \times 10^{-5}$	$2,61 \times 10^{-5}$
Parkinsons Telemonitoring (на GPU)	$2,08 \times 10^{-4}$	$2,17 \times 10^{-5}$	$3,47 \times 10^{-4}$

## 6 ОБГОВОРЕННЯ

Тестова вибірка, що складається з результатів 69 експериментів, включала екземпляри рішень практичних задач у паралельній системі, що не входять у навчальну вибірку. При проведенні експериментів адекватність складності розв'язуваних задач відповідала продуктивності використовуваних паралельних систем.

З рис. 2 і 3 видно, що час рішення задачі на кластері, розрахований за допомогою запропонованої моделі, як правило, є трохи меншим у порівнянні з фактично витраченим часом. Це можна пояснити тим, що час, витрачений на синхронізації та на пересилання даних між процесами кластера, значно варіється в залежності від застосованого середовища передачі даних. При цьому, чим більше задіяно процесів кластера, тим істотнішим є вплив синхронізації і пересилань та тим більшим є відхилення між фактичним і прогнозованим часом вирішення задачі.

Рисунки 4 і 5 дозволяють судити про те, що на GPU зростом кількості задіяних потоків до 140 включно спостерігається зниження витраченого на виконання методу часу. Прогнозований за допомогою запропонованої моделі час поводиться аналогічним чином. При подальшому збільшенні кількості задіяних потоків GPU вплив накладних витрат істотно зростає, частка пересилань і синхронізацій починає перевищувати обсяг цільових обчислень, тому фактично витрачений на виконання методу час починає зростати. Прогнозований за допомогою моделі час також зростає, але дещо швидшими темпами. Таким чином, запропонована модель врахує вплив накладних витрат обчислювального процесу в паралельній системі.

Таблиця 3 дозволяє порівняти середньоквадратичну помилку (основний критерій перевірки адекватності моделі) запропонованої моделі з моделями [27] і [28]. Як видно з таблиці 3 при використанні кластера збільшення параметрів у моделі (1) приводить до зменшення середньоквадратичної помилки. Отже, більш доцільним є застосування на практиці запропонованої моделі в порівнянні з моделями [27] і [28]. На графічних процесорах не спостерігається значного поліпшення значення критерію mse у порівнянні з розглянутими моделями [27] і [28], що обумовлено більш істотним впливом на час вирішення задачі накладних витрат (пересилань і синхронізацій) у порівнянні з кластерами CPU.

## ВИСНОВКИ

У роботі вирішено завдання планування ресурсів паралельних комп’ютерних систем при синтезі нейро-нечітких мереж.

Наукова новизна полягає в тому, що запропоновано модель планування ресурсів паралельних комп’ютерних

систем при синтезі ННМ, що враховує тип комп’ютерної системи, кількість процесів, на яких виконується задача, пропускну здатність мережі передачі даних, параметри використовуваного математичного забезпечення (кількість можливих рішень, оброблюваних у процесі роботи методу, частки рішень, що генеруються на кожній ітерації сточастичного пошуку за допомогою застосування операторів схрещування та мутації), а також параметри розв’язуваної прикладної задачі (кількість спостережень і кількість ознак у заданій множині даних, що описує результати спостережень за досліджуваним об’єктом чи процесом). Синтезована модель дозволяє виконувати оцінювання часу, необхідного паралельній системі для виконання методу синтезу нейро-нечітких мереж.

Практична цінність отриманих результатів полягає в розробленому програмному забезпеченні, що реалізує запропоновану модель і дозволяє раціонально планувати вибір ресурсів комп’ютерної системи для побудови ННМ при вирішенні практичних задач розпізнавання образів, діагностування та прогнозування.

## ПОДЯКИ

Роботу виконано в рамках науково-дослідної теми «Методи і засоби обчислювального інтелекту та паралельного комп’ютингу для оброблення великих даних в системах діагностування» (№ державної реєстрації 0116U007419) кафедри програмних засобів Запорізького національного технічного університету.

## СПІСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Nauck D. Foundations of neuro-fuzzy systems / D. Nauck, F. Klawonn, R. Kruse. – Chichester : John Wiley & Sons, 1997. – 305 p.
2. Бодянський Є. В. Еволюційна каскадна система на основі нейро-фаззі вузлів / Є. В. Бодянський, О. К. Тищенко, О. О. Бойко // Радіоелектроніка, інформатика, управління. – 2016. – № 2. – С. 40–45.
3. Субботин С. А. Метод синтеза диагностических моделей на основе радиально-базисных нейронных сетей с поддержкой обобщающих свойств / С. А. Субботин // Радіоелектроніка, інформатика, управління. – 2016. – № 2. – С. 64–69.
4. Oliynyk A. O. Synthesis of Neuro-Fuzzy Networks on the Basis of Association Rules / A. O. Oliynyk, T. A. Zayko, S. A. Subbotin // Cybernetics and Systems Analysis. – 2014. – Vol. 50, Issue 3. – P. 348–357. DOI: 10.1007/s10559-014-9623-7.
5. Oliynyk A. Training Sample Reduction Based on Association Rules for Neuro-Fuzzy Networks Synthesis / A. Oliynyk, T. Zaiko, S. Subbotin // Optical Memory and Neural Networks (Information Optics). – 2014. – Vol. 23, № 2. – P. 89–95. DOI: 10.3103/S1060992X14020039.
6. Oliynyk A. The decision tree construction based on a stochastic search for the neuro-fuzzy network synthesis / A. Oliynyk, S. A. Subbotin // Optical Memory and Neural Networks (Information Optics). – 2015. – Vol. 24, № 1. – P. 18–27. DOI: 10.3103/S1060992X15010038.

7. Олійник А. О. Видобування продукційних правил на основі негативного відбору / А. О. Олійник // Радіоелектроніка, інформатика, управління. – 2016. – № 1. – С. 40–49.
8. Oliynyk A. O. Using Parallel Random Search to Train Fuzzy Neural Networks / A. O. Oliynyk, S. Yu. Skrupsky, S. A. Subbotin // Automatic Control and Computer Sciences. – 2014. – Vol. 48, Issue 6. – P. 313–323. DOI: 10.3103/S0146411614060078.
9. Oliynyk A. O. Experimental Investigation with Analyzing the Training Method Complexity of Neuro-Fuzzy Networks Based on Parallel Random Search / A. O. Oliynyk, S. Yu. Skrupsky, S. A. Subbotin // Automatic Control and Computer Sciences. – 2015. – Vol. 49, Issue 1. – P. 11–20. DOI: 10.3103/S0146411615010071.
10. Subbotin S. Individual prediction of the hypertensive patient condition based on computational intelligence / S. Subbotin, A. Oliynyk, S. Skrupsky // Information and Digital Technologies : International Conference IDT'2015, Zilina, 7–9 July 2015 : proceedings of the conference. – Zilina : Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2015. – P. 336–344. DOI: 10.1109/DT.2015.7222996.
11. Sulistio A. Simulation of Parallel and Distributed Systems: A Taxonomy – and Survey of Tools / A. Sulistio, C.S. Yeo. R. Buyya // International Journal of Software Practice and Experience. Wiley Press. – 2002. – P. 1–19.
12. Методы и модели планирования ресурсов в GRID-системах : монография / [В. С. Пономаренко, С. В. Листвровой, С. В. Минухин, С.В. Знахур]. – Х. : ИД «ИНЖЭК», 2008. – 408 с.
13. Introduction to GPUs. – Режим доступа: URL: <https://www.cs.utexas.edu/~pingali/CS378/2015sp/lectures/IntroGPUs.pdf>. – Загл. з екрану.
14. Gebali F. Algorithms and Parallel Computing / F. Gebali. – New Jersey : John Wiley & Sons, 2011. – 364 p. DOI: 10.1002/9780470932025.
15. Fokkink W. Distributed Algorithms: An Intuitive Approach / Wan Fokkink. – Cambridge : MIT Press, 2013. – 248 p.
16. Herlihy M. The Art of Multiprocessor Programming Revised Reprint / M. Herlihy, N. Shavit. – Boston : Morgan Kaufmann, 2012. – 536 p.
17. Roosta S. H. Parallel Processing and Parallel Algorithms: Theory and Computation / S. H. Roosta. – New York : Springer-Verlag, NY, 2000. – 566 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-1220-1.
18. Хайкин С. Нейронные сети : полный курс / С. Хайкин. – СПб : Вильямс, 2005. – 1104 с.
19. Suzuki K. Artificial Neural Networks: Architectures and Applications / K. Suzuki. – New York : InTech, 2013. – 264 p. DOI: 10.5772/3409.
20. Hanrahan G. Artificial Neural Networks in Biological and Environmental Analysis / G. Hanrahan. – Boca Raton, Florida : CRC Press, 2011. – 214 p. DOI: 10.1201/b10515.
21. Bodyanskiy Ye. Hybrid adaptive wavelet-neuro-fuzzy system for chaotic time series identification / Ye. Bodyanskiy, O. Vynokurova // Information Sciences. – 2013. – Vol. 220. – P. 170–179. DOI: 10.1016/j.ins.2012.07.044.
22. Bishop C. Neural Networks for pattern recognition / C. Bishop. – New York : Oxford University Press, 1995. – 482 p.
23. Computational intelligence: collaboration, fusion and emergence / [ed. Ch. L. Mumford]. – New York : Springer, 2009. – 752 p. DOI: 10.1007/978-3-642-01799-5.
24. Bodyanskiy Ye. An evolving radial basis neural network with adaptive learning of its parameters and architecture / Ye. Bodyanskiy, A. K. Tyshchenko, A. Deineko // Automatic Control and Computer Sciences. – 2015. – Vol. 49, Issue 5. – P. 255–260. DOI: 10.3103/S0146411615050028.
25. Intelligent data analysis : an introduction / [eds. M. Berthold, D. J. Hand]. – New York : Springer Verlag, 2007. – 525 p. DOI: 10.1007/978-3-540-48625-1.
26. Tenne Y. Computational Intelligence in Expensive Optimization Problems / Y. Tenne, C.-K. Goh. – Berlin : Springer, 2010. – 800 p. DOI: 10.1007/978-3-642-10701-6.
27. Скрупський С. Ю. Експериментальне исследование метода синтеза нейро-нечетких моделей в параллельной компьютерной системе / С. Ю. Скрупський // Радіоелектроніка, інформатика, управління. – 2016. – № 2. – С. 56–63.
28. Oliynyk A. Parallel Computer System Resource Planning for Synthesis of Neuro-Fuzzy Networks / A. Oliynyk, S. Skrupsky, S. Subbotin // Recent Advances in Systems, Control and Information Technology. Advances in Intelligent Systems and Computing – 2017. – Vol. 543. – P. 124–133. DOI: 10.1007/978-3-319-48923-0\_12
29. UCI Machine Learning Repository. <http://archive.ics.uci.edu/ml/>.
30. Quinn M.J. Parallel Programming in C with MPI and OpenMP / M. J. Quinn. – New York, NY : McGraw-Hill, 2004. – 529 p.

Стаття надійшла до редакції 05.10.2016.  
Після доробки 20.11.2016.

Олейник А. А.<sup>1</sup>, Скрупський С. Ю.<sup>2</sup>, Субботин С. А.<sup>3</sup>, Благодарев А. Ю.<sup>4</sup>, Гофман Е. А.<sup>5</sup>

<sup>1</sup>Канд. техн. наук, доцент кафедри программных средств, Запорожский национальный технический университет, Запорожье, Украина

<sup>2</sup>Канд. техн. наук, доцент кафедры компьютерных систем и сетей, Запорожский национальный технический университет, Запорожье, Украина

<sup>3</sup>Д-р техн. наук, заведующий кафедры программных средств, Запорожский национальный технический университет, Запорожье, Украина

<sup>4</sup>Аспирант кафедры программных средств, Запорожский национальный технический университет, Запорожье, Украина

<sup>5</sup>Канд. техн. наук, с.н.с. кафедры программных средств, Запорожский национальный технический университет, Запорожье, Украина

## ПЛАНИРОВАНИЕ РЕСУРСОВ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ СИНТЕЗЕ НЕЙРО-НЕЧЕТКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОБРАБОТКИ БОЛЬШИХ ДАННЫХ

Решена задача планирования ресурсов параллельных компьютерных систем при синтезе нейро-нечетких сетей. Объект исследования – процесс синтеза нейро-нечетких моделей. Предметом исследования являются методы планирования ресурсов параллельных компьютерных систем. Цель работы заключается в построение модели планирования ресурсов параллельных компьютерных систем, осуществляющих решение прикладных задач на основе параллельного метода синтеза нейро-нечетких сетей. Предложена модель планирования ресурсов параллельных компьютерных систем при синтезе нейро-нечетких сетей. Синтезированная модель учитывает тип компьютерной системы, число процессоров, на которых выполняется задача, пропускную способность сети передачи данных, параметры используемого математического обеспечения (число возможных решений, обрабатываемых в процессе работы метода, доли решений, генерируемых на каждой итерации стохастического поиска с помощью применения операторов скрещивания и мутации), а также параметры решаемой прикладной задачи (число наблюдений и число признаков в заданном множестве данных, описывающем результаты наблюдений за исследуемым объектом или процессом). Разработано программное обеспечение, реализующее синтезированную модель планирования ресурсов. Выполнены эксперименты, подтверждающие адекватность предложенной модели. Результаты экспериментов позволяют рекомендовать применение разработанной модели на практике.

**Ключевые слова:** выборки данных, параллельные вычисления, планирование ресурсов, нейро-нечеткая модель, нейронная сеть.

Oliinyk A.<sup>1</sup>, Skrupsky S.Yu.<sup>2</sup>, Subbotin S.<sup>3</sup>, Blagodariov O.<sup>4</sup>, Gofman Ye.<sup>5</sup>

<sup>1</sup>PhD, Associate Professor of Department of Software Tools, Zaporizhzhia National Technical University, Zaporizhzhia, Ukraine

<sup>2</sup>PhD, Associate Professor of Computer Systems and Networks Department, Zaporizhzhia National Technical University, Zaporizhzhia, Ukraine

<sup>3</sup>Dr.Sc., Head of Department of Software Tools, Zaporizhzhia National Technical University, Zaporizhzhia, Ukraine

<sup>4</sup>Postgraduate student of Department of Software Tools, Zaporizhzhia National Technical University, Zaporizhzhia, Ukraine

<sup>5</sup>PhD, Senior Researcher of Department of Software Tools, Zaporizhzhia National Technical University, Zaporizhzhia, Ukraine

## PARALLEL COMPUTING SYSTEM RESOURCES PLANNING FOR NEURO-FUZZY MODELS SYNTHESIS AND BIG DATA PROCESSING

The article deals with the problem of planning resources of parallel computer systems for the synthesis of neuro-fuzzy networks. The object of research is a process of synthesis of neuro-fuzzy models. The subject of research are the methods of resource planning of parallel computer systems. The purpose of the work is to construct a model of parallel computing systems for resource planning, carrying out the decision of practical applications based on parallel method of neuro-fuzzy networks synthesis. A model of parallel computer systems resource planning for the synthesis of neuro-fuzzy networks is proposed. Synthesized model takes into account the type of computer system, the number of processes in which the task is executed, the capacity of data network, the parameters of the mathematical software (number of possible solutions to be processed during the operation of the method, the proportion of solutions generated in each iteration of stochastic search through the use of crossover and mutation operator), as well as parameters of the solved applied problem (the number of observations and the number of features in a given data sample, which describes the results of observing the researching object or process). The software that implements a synthesized model of resource planning is developed. Experiments confirming the adequacy of the proposed model are executed. The experimental results allow us to recommend the usage of the developed model in practice.

**Keywords:** data sample, parallel computing, resource planning, neuro-fuzzy models, neural network.

## REFERENCES

1. Nauck D., Klawonn F., Kruse R. Foundations of neuro-fuzzy systems. Chichester, John Wiley & Sons, 1997, 305 p.
2. Bodyanskiy Ye. V., Tyschenko O. K., Boiko O. O. An evolving cascade system based on neurofuzzy nodes, *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 2016, No. 2, pp. 40–45.
3. Subbotin S. A. The method of diagnostic model synthesis based on radial basis neural networks with the support of generalization properties, *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 2016, No. 2, pp. 64–69.
4. Oliinyk A. O., Zayko T. A., Subbotin S. A. Synthesis of Neuro-Fuzzy Networks on the Basis of Association Rules, *Cybernetics and Systems Analysis*, 2014, Vol. 50, Issue 3, pp. 348–357. DOI: 10.1007/s10559-014-9623-7.
5. Oliinyk A., Zaiko T., Subbotin S. Training Sample Reduction Based on Association Rules for Neuro-Fuzzy Networks Synthesis, *Optical Memory and Neural Networks (Information Optics)*, 2014, Vol. 23, No. 2, pp. 89–95. DOI: 10.3103/S1060992X14020039.
6. Oliinyk A., Subbotin S. A. The decision tree construction based on a stochastic search for the neuro-fuzzy network synthesis, *Optical Memory and Neural Networks (Information Optics)*, 2015, Vol. 24, No. 1, pp. 18–27. DOI: 10.3103/S1060992X15010038.
7. Oliinyk A. Production rules extraction based on negative selection, *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 2016, No. 1, pp. 40–49.
8. Oliinyk A. O., Skrupsky S. Yu., Subbotin S. A. Using Parallel Random Search to Train Fuzzy Neural Networks, *Automatic Control and Computer Sciences*, 2014, Vol. 48, Issue 6, pp. 313–323. DOI: 10.3103/S0146411614060078.
9. Oliinyk A. O., Skrupsky S. Yu., Subbotin S. A. Experimental Investigation with Analyzing the Training Method Complexity of Neuro-Fuzzy Networks Based on Parallel Random Search, *Automatic Control and Computer Sciences*, 2015, Vol. 49, Issue 1, pp. 11–20. DOI: 10.3103/S0146411615010071.
10. Subbotin S., Oliinyk A., Skrupsky S. Individual prediction of the hypertensive patient condition based on computational intelligence, *Information and Digital Technologies : International Conference IDT'2015, Zilina, 7–9 July 2015 : proceedings of the conference*. Zilina, Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2015, pp. 336–344. DOI: 10.1109/DT.2015.7222996.
11. Sulistio A., Yeo C. S., R. Buyya Simulation of Parallel and Distributed Systems: A Taxonomy – and Survey of Tools, *International Journal of Software Practice and Experience*. Wiley Press, 2002, pp. 1–19.
12. Ponomarenko V. S., Listrovoj S. V., Minuhin S. V., Znahur S. V. Metody i modeli planirovaniya resursov v GRID-sistemah: monografija. Xar'kov, ID «INZhJeK», 2008, 408 p.
13. Introduction to GPUs. Rezhim dostupa: URL: <https://www.cs.utexas.edu/~pingali/CS378/2015sp/lectures/IntroGPUs.pdf>. – Zagl. z ekranu.
14. Gebali F. Algorithms and Parallel Computing. New Jersey, John Wiley & Sons, 2011, 364 p. DOI: 10.1002/9780470932025.
15. Fokkink W. Distributed Algorithms: An Intuitive Approach. Cambridge, MIT Press, 2013, 248 p.
16. Herlihy M., Shavit N. The Art of Multiprocessor Programming Revised Reprint. Boston, Morgan Kaufmann, 2012, 536 p.
17. Roosta S. H. Parallel Processing and Parallel Algorithms: Theory and Computation. New York, Springer-Verlag, NY, 2000, 566 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-1220-1.
18. Hajkin S. Nejronnye seti: polnyj kurs. Sankt-Peterburg, Vil'jams, 2005, 1104 p.
19. Suzuki K. Artificial Neural Networks: Architectures and Applications. New York, InTech, 2013, 264 p. DOI: 10.5772/3409.
20. Hanrahan G. Artificial Neural Networks in Biological and Environmental Analysis. Boca Raton, Florida, CRC Press, 2011, 214 p. DOI: 10.1201/b10515.
21. Bodyanskiy Ye., Vynokurova O. Hybrid adaptive wavelet-neuro-fuzzy system for chaotic time series identification, *Information Sciences*, 2013, Vol. 220, pp. 170–179. DOI: 10.1016/j.ins.2012.07.044.
22. Bishop C. Neural Networks for pattern recognition. New York, Oxford University Press, 1995, 482 p.
23. Ch. L. ed. Mumford Computational intelligence: collaboration, fusion and emergence New York, Springer, 2009, 752 p. DOI: 10.1007/978-3-642-01799-5.
24. Bodyanskiy Ye., Tyschenko O. K., Deineko A. An evolving radial basis neural network with adaptive learning of its parameters and architecture, *Automatic Control and Computer Sciences*, 2015, Vol. 49, Issue 5, pp. 255–260. DOI: 10.3103/S0146411615050028.
25. Berthold M. , Hand D. J. eds. Intelligent data analysis: an introduction. New York, Springer Verlag, 2007, 525 p. DOI: 10.1007/978-3-540-48625-1.
26. Tenne Y., Goh C.-K. Computational Intelligence in Expensive Optimization Problems. Berlin, Springer, 2010, 800 p. DOI: 10.1007/978-3-642-10701-6.
27. Skrupsky S. Yu. Experimental investigation of method for the synthesis of neurofuzzy models in a parallel computer system, *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 2016, No. 2, pp. 56–63.
28. Oliinyk A., Skrupsky S., Subbotin S. Parallel Computer System Resource Planning for Synthesis of Neuro-Fuzzy Networks, *Recent Advances in Systems, Control and Information Technology. Advances in Intelligent Systems and Computing*, 2017, Vol. 543, pp. 124–133. DOI: 10.1007/978-3-319-48923-0\_12
29. UCI Machine Learning Repository. <http://archive.ics.uci.edu/ml/>.
30. Quinn M. J. Parallel Programming in C with MPI and OpenMP. New York, NY, McGraw-Hill, 2004, 529 p.

УДК 004.93

Субботин С. А.

Д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой программных средств Запорожского национального технического университета, Запорожье, Украина

## КОМПЛЕКСНОЕ СОКРАЩЕНИЕ РАЗМЕРНОСТИ ДАННЫХ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ДИАГНОСТИЧЕСКИХ И РАСПОЗНАЮЩИХ МОДЕЛЕЙ ПО ПРЕЦЕДЕНТАМ

Решена задача сокращения размерности данных при построении диагностических и распознающих моделей. Объектом исследования являлся процесс диагностирования, управляемый данными. Предметом исследования являлись методы редукции данных для построения диагностических моделей по прецедентам. Целью работы являлось создание комплекса показателей, позволяющих количественно характеризовать ценность экземпляров и признаков, а также метода сокращения размерности выборок данных для решения задач диагностирования и распознавания. Разработано математическое обеспечение, позволяющее осуществлять формирование выборок и отбор признаков в рамках единого подхода к оценке их значимости. Предложен комплекс показателей, позволяющих количественно характеризовать индивидуальную ценность экземпляров и признаков в локальной окрестности в пространстве признаков. Получили дальнейшее развитие методы переборного поиска для сокращения размерности выборок данных при решении задач диагностирования и распознавания, которые модифицированы путем учета в поисковых операторах предложенных индивидуальных оценок информативности экземпляров и признаков. Предложенные методы и комплекс показателей программно реализованы и исследованы при решении задач сокращения размерности данных. Проведенные эксперименты подтвердили работоспособность разработанного математического обеспечения и позволяют рекомендовать его для использования на практике при решении задач неразрушающего диагностирования и распознавания образов по признакам.

**Ключевые слова:** выборка, экземпляр, признак, сокращение размерности данных, формирование выборки, отбор признаков, диагностирование.

### НОМЕНКЛАТУРА

ЭВМ – электронная вычислительная машина;  
 $\delta$  – радиус окрестности;  
 $\Omega$  – группа признаков, рассматриваемых совместно;  
 $E$  – ошибка модели;  
 $f$  – критерий качества;  
 $F()$  – структура модели;  
 $I(x', y')$  – показатель качества  $\langle x', y' \rangle$ ;  
 $I_s(x^s)$  – показатель информативности  $s$ -го экземпляра;  
 $I_j^*$  – показатель информативности  $j$ -го признака,  
 $I_\Omega^*$  – показатель групповой информативности признаков;  
 $j$  – номер текущего признака;  
 $I_s(x^s | x)$  – показатель индивидуальной информативности экземпляра  $x^s$  относительно исходного набора признаков;  
 $I_s(x^s | x \setminus x_j)$  – показатель индивидуальной информативности экземпляра относительно сокращенного набора признаков путем удаления признака  $x_j$  из исходного набора признаков;  
 $K$  – число классов;  
 $m$  – объем памяти ЭВМ, затраченный на формирование выборки;  
 $n$  – размерности входа;  
 $N$  – число входных признаков в исходной выборке;  
 $N'$  – число входных признаков в редуцированной выборке;  
 $N^*$  – число удаляемых признаков;  
 $opt$  – условное обозначение оптимума;

$R(a, b)$  – расстояние между  $a$  и  $b$ ;

$s$  – номер текущего экземпляра;

$S$  – число прецедентов в выборке;

$S'$  – объем редуцированной выборки;

$S^*$  – число удаляемых экземпляров;

$S_\delta$  – число экземпляров того же класса, что и класс экземпляра  $x^s$ , находящихся в его окрестности, не включая сам экземпляр  $x^s$ ;

$t$  – время, затраченное на формирование выборки;

$w$  – набор значений параметров модели;

$X$  – исходная выборка;

$x$  – набор входных признаков в исходной выборке;

$X'$  – редуцированная выборка;

$x'$  – набор входных признаков в редуцированной выборке;

$x_j$  –  $j$ -й входной признак в исходной выборке;

$x^s$  –  $s$ -й экземпляр выборки;

$x_j^s$  – значение  $j$ -го входного признака для  $s$ -го прецедента;

$x_j^{\max}$  – максимальное значение  $j$ -го признака;

$x_j^{\min}$  – минимальное значение  $j$ -го признака;

$y$  – выходной признак в исходной выборке;

$y'$  – выходной признак в редуцированной выборке;

$y^s$  – значение выходного признака для  $s$ -го прецедента (экземпляра) выборки.

### ВВЕДЕНИЕ

Для обеспечения устойчивого функционирования сложного технического оборудования, изделий научекомого машиностроения и электронной техники необходимо своевременно осуществлять их диагностирование [1].

Из-за новизны объектов диагностирования, присущей им динамики, нелинейностей и отсутствия или недоста-

точности экспертных знаний широкое применение на практике для построения автоматизированных систем диагностирования получило диагностирование, управляемое данными [2].

Объектом исследования являлся процесс диагностирования, управляемый данными.

Диагностирование, управляемое данными, предполагает построение диагностических моделей с помощью методов вычислительного интеллекта [3] на основе набора прецедентов.

Построение диагностических и распознающих моделей по прецедентам, как правило, является итеративным процессом, требующим значительных затрат времени для выборок большой размерности. Поэтому для повышения скорости построения диагностических и распознающих моделей необходимо предварительно сокращать размерность данных.

Предметом исследования являлись методы редукции данных для построения диагностических моделей по прецедентам.

Известные методы редукции данных [4–13] исходят из различных точек зрения на важность экземпляров и признаков, что может приводить противоречию между отбором экземпляров и признаков. Поэтому необходимо разработать метод редукции данных, осуществляющий отбор экземпляров и признаков исходя из одного общего представления об их информативности.

Целью данной работы являлось создание комплекса показателей, позволяющих количественно характеризовать ценность экземпляров и признаков, а также метода сокращения размерности выборок данных для решения задач диагностирования и распознавания.

## 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть мы имеем исходную выборку  $X = \langle x, y \rangle$  – набор  $S$  прецедентов о зависимости  $y(x)$ ,  $x = \{x^s\}$ ,  $y = \{y^s\}$ ,  $s = 1, 2, \dots, S$ , характеризующихся набором  $N$  входных признаков  $\{x_j\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , и выходным признаком  $y$ . Каждый  $s$ -й прецедент представим как  $\langle x^s, y^s \rangle$ ,  $x^s = \{x_j^s\}$ , где  $y^s \in \{1, 2, \dots, K\}$ , где  $K > 1$ .

Тогда задача синтеза модели зависимости  $y(x)$  будет заключаться в определении таких структуры  $F()$  и значений параметров  $w$  модели, при которых будет удовлетворен критерий качества модели  $f(F(), w, \langle x, y \rangle) \rightarrow \text{opt}$ , где  $\text{opt}$  – условное обозначение оптимума.

В случае, когда исходная выборка имеет большую размерность, перед построением модели необходимо решить задачу выделения обучающей выборки меньшего объема (дано:  $X = \langle x, y \rangle$ , надо:  $X' = \langle x', y' \rangle$ ,  $x' \in \{x^s\}$ ,  $y' = \{y^s | x^s \in x'\}$ ,  $S' = |y'|$ ,  $S' < S$ ,  $f(\langle x', y' \rangle, \langle x, y \rangle) \rightarrow \text{opt}$ ).

## 2 ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР

Сокращение размерности выборки данных, как правило, обеспечивается посредством отбора информативных признаков и отбора наиболее значимых экземпляров из исходной выборки.

Известные методы отбора признаков [2, 14], как правило, основаны на переборной стратегии и оперируют некоторым показателем качества, характеризующим индивидуальную или совместную полезность признаков для решения соответствующей задачи.

Для оценки информативности признаков используют широкий спектр показателей [14, 15], которые характеризуют полезность признаков с некоторой точки зрения. В общем случае, не только количественные, но и качественные оценки данных показателей могут не совпадать.

Методы выделения выборок (отбора экземпляров) [4–13], в свою очередь, также основаны на переборной стратегии и оперируют некоторым показателем качества, характеризующим индивидуальную или совместную полезность экземпляров для решения соответствующей задачи.

Для оценки качества сформированной выборки возможно использовать широкий набор предложенных показателей [5, 6], которые на практике в общем случае качественно дают разные оценки ценности экземпляров.

Также в целом следует отметить, что подходы к оценке важности признаков не совпадают в общем случае с подходами к оценке важности экземпляров. Это затрудняет формирование единой стратегии сокращения размерности данных.

Поэтому представляется необходимым разработать показатели и методы, позволяющие давать оценки информативности и производить отбор как экземпляров, так и признаков в рамках единого подхода.

## 3 МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Поскольку масштаб значений признаков, которыми характеризуется выборка, может быть существенно различным, это может привести к подавлению одних признаков другими при сравнении экземпляров в процессе формирования выборки.

Для исключения данного негативного эффекта предлагаются использовать нормированные расстояния как меру близости (меру подобия) экземпляров:

$$R(x^s, x^p) = R(x^p, x^s) = \sum_{j=1}^N \left( \frac{x_j^s - x_j^p}{x_j^{\max} - x_j^{\min}} \right)^2,$$
$$s = 1, 2, \dots, S; p = s+1, s+2, \dots, S.$$

Под локально влияющими на экземпляр  $x^s$  в окрестности радиуса  $\delta$  будем понимать множество тех экземпляров обучающей выборки, которые удалены от экземпляра  $x^s$  не более чем на  $\delta$ ,  $0 < \delta \leq 1$ .

Показатель информативности экземпляра относительно внешних границ класса в локальной окрестности радиуса  $\delta$  определим по формуле:

$$I_O(x^s) = \frac{1}{S_\delta(x^s)} \sum_{p=1}^S \left\{ R(x^s, x^p) \mid R(x^s, x^p) \leq \delta, y^s = y^p, p \neq s \right\},$$

где  $S_\delta$  – число экземпляров того же класса, что и класс экземпляра  $x^s$ , находящихся в его окрестности, не включая сам экземпляр  $x^s$ :

$$S_\delta(x^s) = \sum_{p=1}^S \left\{ \mid R(x^s, x^p) \leq \delta, y^s = y^p, p \neq s \right\}.$$

Предложенный показатель  $I_O$  будет принимать значения в интервале  $[0, 1]$ . Чем больше будет значение показателя  $I_O$ , тем ближе экземпляр  $x^s$  к внешней границе соответствующего класса в локальной окрестности радиуса  $\delta$ .

Показатель информативности экземпляра  $x^s$  относительно межклассовых границ в локальной окрестности радиуса  $\delta$  определим по формуле:

$$I_C(x^s) = \frac{1}{1 + \sum_{p=1}^S \left\{ R(x^s, x^p) \mid R(x^s, x^p) \leq \delta, y^s = y^p, p \neq s \right\}}.$$

Предложенный показатель  $I_C$  будет принимать значения в интервале  $[(1+NS)^{-1}, 1]$ . Чем больше будет значение показателя  $I_C$ , тем ближе экземпляр  $x^s$  к межклассовой границе в локальной окрестности радиуса  $\delta$ .

Показатель информативности экземпляра относительно внутриклассового центра в локальной окрестности радиуса  $\delta$  определим по формуле:

$$I_B(x^s) = \frac{1}{1 + \min_{p=1,2,\dots,S} \left\{ R(x^s, x^p) \mid R(x^s, x^p) \leq \delta, y^s \neq y^p, p \neq s \right\}}.$$

Предложенный показатель  $I_B$  будет принимать значения в интервале  $[(1+N)^{-1}, 1]$ . Чем больше будет значение показателя  $I_B$ , тем ближе экземпляр  $x^s$  к центру своего класса в локальной окрестности радиуса  $\delta$ .

Комбинированный показатель информативности экземпляра относительно внешних границ класса и межклассовых границ в локальной окрестности радиуса  $\delta$  определим по формуле:

$$I_{OC}(x^s) = \max \{I_O(x^s), I_C(x^s)\}.$$

Предложенный показатель будет принимать значения в интервале  $[0, 1]$ . Чем больше будет значение показателя  $I_{OC}$ , тем ближе экземпляр  $x^s$  к внешним границам класса и межклассовой границе в локальной окрестности радиуса  $\delta$ .

Комбинированный показатель информативности экземпляра относительно внешних границ класса и внутриклассового центра в локальной окрестности радиуса  $\delta$  определим по формуле:

$$I_{OB}(x^s) = \max \{I_O(x^s), I_B(x^s)\}.$$

Предложенный показатель  $I_{OB}$  будет принимать значения в интервале  $[0, 1]$ . Чем больше будет значение показателя  $I_{OB}$ , тем ближе экземпляр  $x^s$  к внешним границам класса, к центру своего класса в локальной окрестности радиуса  $\delta$ .

Комбинированный показатель информативности экземпляра относительно межклассовых границ и внутриклассового центра экземпляра в локальной окрестности радиуса  $\delta$  определим по формуле:

$$I_{BC}(x^s) = \max \{I_B(x^s), I_C(x^s)\}.$$

Предложенный показатель  $I_{BC}$  будет принимать значения в интервале  $[(N2S+NS+N+1)^{-1}, 1]$ . Чем больше будет значение показателя  $I_{BC}$ , тем ближе экземпляр  $x^s$  к межклассовой границе и ближе к центру своего класса в локальной окрестности радиуса  $\delta$ .

Комбинированный показатель информативности экземпляра относительно внешних границ класса, межклассовых границ и внутриклассового центра экземпляра в локальной окрестности радиуса  $\delta$ :

$$I_{OBC}(x^s) = \max \{I_O(x^s), I_B(x^s), I_C(x^s)\}.$$

Предложенный показатель  $I_{OBC}$  будет принимать значения в интервале  $[0, 1]$ . Чем больше будет значение показателя  $I_{OBC}$ , тем ближе экземпляр  $x^s$  к внешним границам класса, межклассовой границе, ближе к центру своего класса в локальной окрестности радиуса  $\delta$ .

Предложенный выше комплекс показателей может быть использован не только для отбора экземпляров, но также и для оценки информативности и отбора признаков.

Показатели индивидуальной информативности признаков можно определить по обобщенной формуле:

$$I_j^* = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \left( I_*(x^s | x) - I_*(x^s | x \setminus x_j) \right)^2,$$

где маркер «\*» заменяется обозначением типа соответствующего показателя информативности экземпляров.

Данный показатель будет принимать значения от нуля до единицы. Чем больше будет значение данного показателя, тем сильнее влияние соответствующего признака на качество выборки с точки зрения выбранного типа показателей информативности экземпляров.

Показатели групповой информативности признаков можно определить по обобщенной формуле:

$$I_\Omega^* = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \left( I_*(x^s | x) - I_*(x^s | x \setminus \Omega) \right)^2,$$

где маркер «\*» заменяется обозначением типа соответствующего показателя информативности экземпляров.

Данный показатель будет принимать значения от нуля до единицы. Чем больше будет значение данного показателя, тем сильнее влияние соответствующей группы признаков на качество выборки с точки зрения выбранного типа показателей информативности экземпляров.

Предложенный комплекс показателей может быть использован в методах редукции данных.

Наиболее точным является метод редукции на основе стратегии полного перебора [14]. Данный метод сначала выполняет перебор всех возможных комбинаций экземпляров из исходной выборки. После чего оценивается их качество и выбирается одна комбинация, содержащая наименьшее число экземпляров, обеспечивающее приемлемый уровень качества. Затем выполняется перебор всех возможных комбинаций признаков. После чего оценивается их качество и выбирается одна комбинация признаков, содержащая наименьшее число признаков, обеспечивающее приемлемый уровень качества. Формально данный метод может быть представлен следующим образом.

0. Задать исходную выборку  $\langle x, y \rangle$ .
1. Редукция экземпляров.
  - 1.1. Сгенерировать все возможные комбинации экземпляров  $\{\langle x', y' \rangle\}$  как подвыборки  $\langle x, y \rangle$ .
  - 1.2. Для каждой комбинации экземпляров  $\langle x', y' \rangle$  оценить выбранный показатель качества  $I(\langle x', y' \rangle)$ .

1.3. В качестве итоговой сокращенной выборки принять комбинацию  $\langle x', y' \rangle$ , содержащую наименьшее число экземпляров при приемлемом значении показателя качества  $I(\langle x', y' \rangle)$ .

2. Редукция признаков.

2.1. Сгенерировать все возможные комбинации признаков для сокращенной выборки  $\langle x', y' \rangle$ .

2.2. Для каждой комбинации признаков по сокращенной выборке  $\langle x', y' \rangle$  оценить выбранный показатель качества  $I(\langle x', y' \rangle)$ .

2.3. Оставить в сокращенной выборке  $\langle x', y' \rangle$  только те признаки, которые входят в комбинацию, содержащую наименьшее число признаков при приемлемом значении показателя качества.

Данный метод потребует перебора  $2^S - 1$  комбинаций экземпляров на этапе редукции экземпляров и  $2^N - 1$  комбинаций признаков на этапе редукции признаков. Очевидно, что такой метод является самым медленным и вычислительно затратным. Его практическая применимость весьма ограничена.

Для устранения недостатков полного перебора возможно, оценив индивидуальную информативность признаков и экземпляров, последовательно удалять из исходной выборки некоторое подмножество наименее индивидуально информативных экземпляров и признаков, строя каждый раз по редуцированной выборке модель и оценивая показатель качества, до тех пор, пока признаков больше двух, экземпляров не меньше, чем классов, а точность модели является приемлемой.

Быстрый метод редукции данных, реализующий данные идеи, представим следующим образом.

1. Принять в качестве текущей выборки  $\langle x', y' \rangle$  исходную выборку  $\langle x, y \rangle$ . Задать число удаляемых экземпляров  $S^*$  и число удаляемых признаков  $N^*$ .

2. Оценить индивидуальную информативность экземпляров и индивидуальную информативность признаков в выборке.

3. Если  $S^* > S^*$ , то удалить  $S^*$  наименее индивидуально информативных экземпляров из текущей выборки. Если  $N^* > N^*$ , то удалить  $N^*$  наименее информативных признаков из текущей выборки.

4. Построить распознающую модель по редуцированной выборке  $\langle x', y' \rangle$ .

5. Оценить ошибку построенной модели  $E$  по исходной выборке  $\langle x, y \rangle$ . Например, в качестве критерия ошибки можно использовать среднюю ошибку:

$$E = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \{1 | y^s \neq y^s\}.$$

6. Если ошибка  $E$  приемлемая, то принять в качестве текущей выборки редуцированную выборку и перейти к этапу 3; в противном случае – вернуть в качестве результата текущую выборку  $\langle x', y' \rangle$ .

Такой метод при выборе достаточно больших значений  $S^*$  и  $N^*$  будет обеспечивать очень быстрое сокращение размерности выборки, однако будет достигать этого за счет потери информации, что повлечет уменьшение точности. Поскольку данный метод требует построения модели, то его эффективность также будет зависеть от эффективности используемого метода построения модели.

Поскольку одновременная редукция экземпляров и признаков может в ряде практических приложений слишком быстро приводить к потере информации и, как следствие, точности синтезируемой модели, представляется целесообразным для таких случаев последовательно редуцировать данные, синтезируя модель для контроля потери информации, и тем самым обеспечивая более тщательный контроль редукции данных.

Последовательный метод редукции данных, реализующий данные идеи, представим следующим образом.

1. Принять в качестве текущей выборки  $\langle x', y' \rangle$  исходную выборку  $\langle x, y \rangle$ . Задать число удаляемых экземпляров  $S^*$  и число удаляемых признаков  $N^*$ .

2. Оценить индивидуальную информативность экземпляров в исходной выборке.

3. Если  $S^* > S^*$ , то удалить  $S^*$  наименее индивидуально информативных экземпляров из текущей выборки  $\langle x', y' \rangle$ .

4. Построить модель на основе текущей выборки и оценить ошибку модели по исходной выборке.

5. Если ошибка модели приемлемая и  $S^* > S^*$ , то перейти к этапу 3; в противном случае – вернуть предыдущий набор экземпляров  $\langle x', y' \rangle$ .

6. Оценить индивидуальную информативность признаков по редуцированной текущей выборке  $\langle x', y' \rangle$ .

7. Если  $N^* > N^*$ , то удалить  $N^*$  наименее информативных признаков из текущей выборки  $\langle x', y' \rangle$ .

8. Построить распознающую модель на основе текущей выборки  $\langle x', y' \rangle$  и оценить ошибку модели  $E$  по исходной выборке  $\langle x, y \rangle$ .

9. Если ошибка модели  $E$  приемлемая и  $N^* > N^*$ , то перейти к этапу 7; в противном случае – вернуть предыдущий набор признаков  $\langle x', y' \rangle$ .

Такой метод при выборе достаточно больших значений  $S^*$  и  $N^*$  будет обеспечивать быстрое сокращение размерности выборки, однако оно будет медленнее, чем у предыдущего метода. При этом данный метод за счет большего контроля ошибки сможет потенциально терять меньше информации, обеспечивая более тщательный отбор признаков. Тем не менее, поскольку данный метод требует построения модели, то его эффективность также будет зависеть от эффективности используемого метода построения модели.

Для комплекса предложенных показателей и методов сокращения размерности выборок данных существенным параметром является выбор размера окрестности  $\delta$ .

Очевидно, что при большом значении  $\delta$  в локальную окрестность экземпляра будет попадать большое число экземпляров, что сделает трудоемким расчет показателей информативности, однако позволит сопоставить соответствующий экземпляр с большим числом других экземпляров, обеспечивая более точную оценку важности экземпляра.

При малом значении  $\delta$  в локальную окрестность экземпляра может не попасть ни одного экземпляра, либо попасть очень небольшое число экземпляров. Это не позволит обеспечить приемлемую точность оценивания важности экземпляров.

Предположим, что экземпляры равномерно распределены в пространстве признаков. Тогда в окрестности радиуса  $\delta$  каждого экземпляра окажется порядка  $SV$  экземпляров, где  $V = \pi^{0.5N} \delta^N / \Gamma(0.5N + 1)$ , где  $\Gamma$  – гамма-функция.

Очевидно, что  $S >> SV$ . Следовательно,  $V \ll 1$ . Зафиксировав  $N$ , получим  $0 < \delta \ll \pi^{-0.5} \sqrt{N} \Gamma(0.5N+1) \leq 1$ .

#### 4 ЕКСПЕРИМЕНТИ

Для проверки работоспособности предложенного комплекса показателей информативности экземпляров и признаков, а также методов редукции данных они были программно реализованы и исследованы на наборе синтетических выборок данных.

Каждая выборка содержала экземпляры двух классов, характеризовавшиеся наборами признаков. Значения одной части признаков генерировались случайным образом. Значения другой части признаков определялись как комбинации значений некоторых признаков первой части. Характеристики синтетических выборок данных приведены в табл. 1.

Таблица 1 – Характеристики синтетических выборок данных

№ выборки	$N$	$S$	$n$
1	10	20	200
2	20	20	400
3	20	20	800
4	40	40	1600
5	100	100	10000
6	500	500	250000
7	1000	1000	1000000

В первой серии экспериментов осуществлялось сравнение методов по затратам ресурсов и достигнутой точности (ошибке) моделей, синтезированных по редуцированным выборкам.

Во второй серии экспериментов исследовался вопрос выбора значения  $\delta$ .

#### 5 РЕЗУЛЬТАТИ

В табл. 2 представлены результаты сравнения затрат ресурсов предложенных методов редукции данных при решении синтетических задач редукции данных.

Как видно из табл. 2, метод полного перебора является наиболее затратным как по используемым вычислительным ресурсам, так и по ресурсам памяти. Метод быстрой редукции является наиболее эффективным с точки зрения затрат ресурсов, а метод последовательной редукции требует несколько больше вычислительных ресурсов и ресурсов памяти, по сравнению с быстрым методом редукции.

В табл. 3 представлены результаты сравнения полученной ошибки моделей, построенных на основе редуцированных данных, полученных с помощью предложенных методов.

Таблица 2 – Сравнительная характеристика методов редукции данных по затратам ресурсов

№ выборки	Метод полного перебора		Метод быстрой редукции		Последовательный метод редукции	
	$t, \text{с}$	$m, \text{Мб}$	$t, \text{с}$	$m, \text{Мб}$	$t, \text{с}$	$m, \text{Мб}$
1	0,5249	40,102	0,0111	0,004	0,0212	0,009
2	1,0486	160,039	0,0161	0,008	0,0336	0,018
3			0,0433	0,015	0,0845	0,036
4			0,0642	0,031	0,1344	0,072
5			0,4006	0,191	0,8402	0,448
6			10,0032	4,802	21,0021	11,208
7			40,0109	19,109	84,1093	44,801

Таблица 3 – Сравнительная характеристика методов редукции данных по ошибке модели  $E$

№ выборки	Метод полного перебора	Метод быстрой редукции	Последовательный метод редукции
1	0	0	0
2	0	0,05	0
3		0,05	0,05
4		0,08	0,05
5		0,07	0,05
6		0,06	0,04
7		0,06	0,06

Как видно из табл. 3, метод полного перебора обеспечивает наибольшую точность, однако из-за ограничений по ресурсам не имеет широкой практической применимости. Метод быстрой редукции в среднем обеспечивает несколько большую ошибку по сравнению с последовательным методом редукции.

На рис. 1 представлены результаты проведенных экспериментов по подбору значения  $\delta$  для разных значений числа используемых признаков  $N$ .

Как видно из рис. 1, с увеличением числа признаков  $N$  также возрастает практический порог для задания значения  $\delta$ . При этом даже для небольших  $N$  вполне приемлемым является значение  $\delta=0,5$ .

На рис. 2 представлен график усредненной зависимости ошибки полученных моделей  $E$  от величины  $\delta$ .

Как видно из рис. 2, при относительно малых значениях  $\delta$  наблюдается наибольшая средняя ошибка  $E$ , которая существенно сокращается с увеличением значения  $\delta$ . Наиболее сильное падение ошибки наблюдается в диапазоне значений  $\delta < 0,4$ .

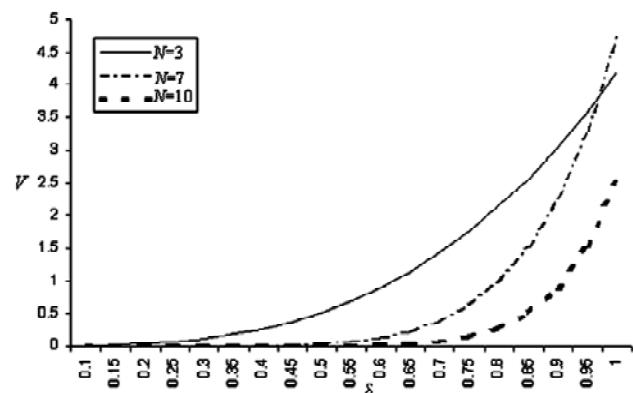


Рисунок 1 – Графики зависимостей  $V$  от  $\delta$  для разных значений  $N$

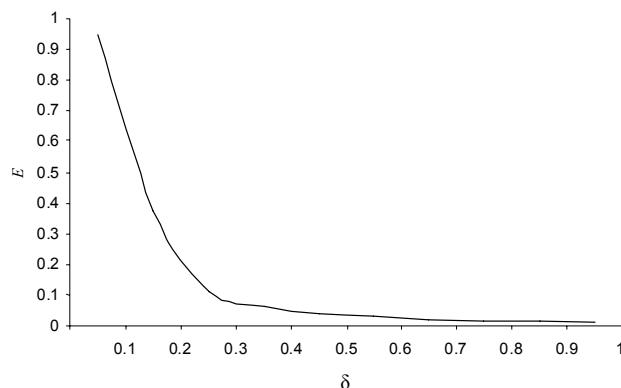


Рисунок 2 – График усредненной зависимости ошибки полученных моделей  $E$  от  $\delta$

Разработанные методы осуществляют редукцию выборки данных в рамках единого подхода к оценке индивидуальной информативности признаков и экземпляров, что позволяет сократить объем вычислений по сравнению с традиционным подходом, когда задачи отбора экземпляров и признаков решаются раздельно в рамках разных парадигм. Это позволяет существенно снизить затраты как вычислительных ресурсов, так и ресурсов памяти.

## 6 ОБСУЖДЕНИЕ

Метод полного перебора позволяет обеспечить наиболее точный результат решения задачи отбора информативных признаков и экземпляров минимального объема. Однако с практической точки зрения для большинства приложений данный метод оказывается не применимым.

Быстрый и последовательный методы редукции позволяют решать задачу сокращения размерности данных за приемлемое с практической точки зрения время. При этом методы обеспечивают требуемую точность при правильном подборе величины  $\delta$ .

Результаты проведенных экспериментов позволяют рекомендовать задавать на практике значение  $\delta$  порядка 0,5. При этом для больших выборок и малом числе признаков значение  $\delta$  можно сокращать до 0,3–0,4. Для малых выборок, описываемых большим числом признаков значение  $\delta$  можно задавать порядка 0,7–0,8.

Отметим также, что предложенные методы автоматически определяют размер формируемой выборки, не требуя участия человека.

## ВЫВОДЫ

С целью решения задачи сокращения размерности данных при построении диагностических и распознающих моделей разработано математическое обеспечение, позволяющее осуществлять формирование выборок и отбор признаков в рамках единого подхода к оценке их значимости.

Научная новизна полученных результатов состоит в том, что:

- впервые предложен комплекс показателей, позволяющих количественно характеризовать индивидуальную ценность экземпляров и признаков в локальной окрестности в пространстве признаков;

- получены дальнейшее развитие методы переборного поиска, которые модифицированы путем учета в поисковых операторах предложенных индивидуальных оценок информативности экземпляров и признаков а

также метода сокращения размерности выборок данных для решения задач диагностирования и распознавания.

Практическая значимость полученных результатов заключается в том, что предложенные методы и комплекс показателей программно реализованы и исследованы при задаче сокращения размерности данных. Проведенные эксперименты подтвердили работоспособность разработанного математического обеспечения и позволяют рекомендовать его для использования на практике.

Перспективы дальнейших исследований состоят в том, чтобы определить более быстрые способы расчета предложенных показателей информативности экземпляров, изучить их взаимосвязь с качеством синтезируемых моделей, исследовать предложенное математическое обеспечение на более широком классе практических задач диагностирования и распознавания образов.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в рамках госбюджетной научно-исследовательской темы Запорожского национального технического университета «Методы и средства вычислительного интеллекта и параллельного компьютеринга для обработки больших объемов данных в системах диагностирования» (номер гос. регистрации 0116U007419) при частичной поддержке международного проекта «Центры передового опыта для молодых ученых» Европейского Союза (№ 544137-TEMPUS-1-2013-1-SK-TEMPUS-JPHES) при частичной поддержке международного проекта «Центры передового опыта для молодых ученых» Европейского Союза (№ 544137-TEMPUS-1-2013-1-SK-TEMPUS-JPHES).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Интеллектуальные информационные технологии проектирования автоматизированных систем диагностирования и распознавания образов : монография / С. А. Субботин, Ан. А. Олейник, Е. А. Гофман, С. А. Зайцев, Ал. А. Олейник ; под ред. С. А. Субботина. – Харьков : Компания СМИТ, 2012. – 318 с.
2. Russell E. L. Data-driven diagnosis Data-driven Methods for Fault Detection and Diagnosis in Chemical Processes / E. L. Russell, L. H. Chiang, R. D. Braatz. – London : Springer-Verlag, 2000. – 192 p. DOI: 10.1007/978-1-4471-0409-4
3. Computational intelligence: a methodological introduction / [R. Kruse, C. Borgelt, F.Klawonn et. al.]. – London : Springer-Verlag, 2013. – 488 p. DOI: 10.1007/978-1-4471-5013-8\_1
4. Олешко Д. Н. Построение качественной обучающей выборки для прогнозирующих нейросетевых моделей / Д. Н. Олешко, В. А. Крисилов, А. А. Блажко // Штучний інтелект. – 2004. – № 3. – С. 567–573.
5. Subbotin S. A. The training set quality measures for neural network learning / S. A. Subbotin // Optical memory and neural networks (information optics). – 2010. – Vol. 19, № 2. – P. 126–139. DOI: 10.3103/s1060992x10020037
6. Субботин С. А. Критерий индивидуальной информативности и методы отбора экземпляров для построения диагностических и распознающих моделей / С. А. Субботин // Біоніка інтелекту. – 2010. – № 1. – С. 38–42.
7. Encyclopedia of survey research methods / ed. P. J. Lavrakas. – Thousand Oaks: Sage Publications, 2008. – Vol. 1–2. – 968 p. DOI: 10.1108/09504121011011879
8. Hansen M. H. Sample survey methods and theory / M. H. Hansen, W. N. Hertz, W. G. Madow. – Vol. 1 : Methods and applications. – New York : John Wiley & Sons, 1953. – 638 p.
9. Кокрен У. Методы выборочного исследования / У. Кокрен ; пер. с англ. И. М. Сонина ; под ред. А. Г. Волкова, Н. К. Дружинина. – М. : Статистика, 1976. – 440 с.

10. Multivariate analysis, design of experiments, and survey sampling / ed. S. Ghosh. – New York : Marcel Dekker Inc., 1999. – 698 p.
11. Smith G. A deterministic approach to partitioning neural network training data for the classification problem : dissertation ... doctor of philosophy in business / Smith Gregory. – Blacksburg : Virginia Polytechnic Institute & State University, 2006. – 110 p.
12. Bernard H. R. Social research methods: qualitative and quantitative approaches / H. R. Bernard. – Thousand Oaks: Sage Publications, 2006. – 784 p.
13. Chaudhuri A. Survey sampling theory and methods / A. Chaudhuri, H. Stenger. – New York : Chapman & Hall, 2005. – 416 p.
14. Субботін С. О. Інтелектуальні системи : навч. посіб. / С. О. Субботін, А. О. Олійник; під заг. ред. проф. С. О. Субботіна. – Запоріжжя : ЗНТУ, 2014. – 218 с.
15. Биргер И. А. Техническая диагностика / И. А. Биргер. – М. : Машиностроение, 1978. – 240 с.

Стаття поступила в редакцію 29.06.2016.

Субботін С. О.

Д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри програмних засобів Запорізького національного технічного університету, Запоріжжя, Україна

## КОМПЛЕКСНЕ СКОРОЧЕННЯ РОЗМІРНОСТІ ДАНИХ ДЛЯ ПОБУДОВИ ДІАГНОСТИЧНИХ І РОЗПІЗНАВАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ ЗА ПРЕЦЕДЕНТАМИ

Вирішено завдання скорочення розмірності даних при побудові діагностичних і розпізнавальних моделей. Об'єктом дослідження є процес діагностування, керований даними. Предметом дослідження є методи редукції даних для побудови діагностичних моделей за прецедентами. Метою роботи є створення комплексу показників, що дозволяють кількісно характеризувати цінність екземплярів і ознак, а також методу скорочення розмірності вибірок даних для вирішення завдань діагностування та розпізнавання. Розроблено математичне забезпечення, що дозволяє здійснювати формування вибірок та відбір ознак в рамках єдиного підходу щодо оцінки їх значимості. Запропоновано комплексы показників, що дозволяють кількісно характеризувати індивідуальну цінність екземплярів і ознак у локальній околії в просторі ознак. Отримали подальший розвиток методи переборного пошуку для скорочення розмірності вибірок даних при вирішенні завдань діагностування та розпізнавання, які модифіковані шляхом урахування у пошукових операторах запропонованих індивідуальних оцінок інформативності екземплярів і ознак. Запропоновані методи і комплекс показників програмно реалізовані і досліджені шляхом вирішення завдань скорочення розмірності даних. Проведені експерименти підтвердили працевздатність розробленого математичного забезпечення і дозволяють рекомендувати його для використання на практиці при вирішенні завдань неруйнівного діагностування та розпізнавання образів за ознаками.

**Ключові слова:** вибірка, екземпляр, ознака, скорочення розмірності даних, формування вибірки, відбір ознак, діагностування.

Subbotin S. A.

Dr.Sc., Professor, Head of the Department of Software Tools, Zaporizhzhya National Technical University, Zaporizhzhya, Ukraine

## THE COMPLEX DATA DIMENSIONALITY REDUCTION FOR DIAGNOSTIC AND RECOGNITION MODEL BUILDING ON PRECEDENTS

The problem of data dimensionality reduction for diagnostic and recognizing model construction is solved. The object of study is the process of data-driven diagnosis. The subject of study is the data reduction methods for diagnostic model construction on precedents. The purpose of work is to create a set of indicators to quantify the importance of instances and features, as well as a method of data sample dimensionality reduction in the diagnosis and pattern recognition and problem solving. The mathematical support for the sample formation and feature selection is developed on the base of common approach to the assessment of their significance. The set of indicators is proposed to quantify the individual informativity of instances and features in the local neighborhood in the feature space. The exhaustive search methods for data sample dimensionality reduction in the solution of recognition and diagnosis problems have been further developed. They are modified by taking into account of the offered individual estimations of informativity of instances and features in the search operators. The proposed methods and indicator complex are implemented as software and studied in the solution of data dimensionality reduction problems. The conducted experiments confirmed the efficiency of the developed mathematical tools and allow to recommend them for use in practice for solving the problems of non-destructive diagnosis and pattern recognition on features.

**Keywords:** sample, instance, feature, data dimensionality reduction, sampling, feature selection, diagnosis.

## REFERENCES

1. Subbotin S. A., Olejnik An. A., Gofman E. A., Zajcev S. A., Olejnik Al. A.; pod red. Subbotina S. A. Intellektual'nye informacionnye tehnologii proektirovaniya avtomatizirovannyh sistem diagnostirovaniya i raspoznavaniya obrazov: monografija. Har'kov, Kompanija SMIT, 2012, 318 p.
2. Russell E. L., Chiang L. H., Braatz R. D. Data-driven diagnosis Data-driven Methods for Fault Detection and Diagnosis in Chemical Processes. London, Springer-Verlag, 2000, 192 p. DOI: 10.1007/978-1-4471-0409-4
3. Kruse R., Borgelt C., Klawonn F. et. al. Computational intelligence: a methodological introduction. London, Springer-Verlag, 2013, 488 p. DOI: 10.1007/978-1-4471-5013-8\_1
4. Oleshko D. N., Krisilov V. A., Blazhko A. A. Postroenie kachestvennoj obuchayushhej vyborki dlya prognoziruyushhix nejrosetevykh modelej, *Shtuchnyj intelekt*, 2004, No. 3, pp. 567–573.
5. Subbotin S. A. The training set quality measures for neural network learning, Optical memory and neural networks (information optics), 2010, Vol. 19, No. 2, pp. 126–139. DOI: 10.3103/s1060992x10020037
6. Subbotin S. A. Kriterii individual'noj informativnosti i metody otboru e'kzempliarov dlya postroeniya diagnosticheskix i raspoznayushhix modelej, *Bionika intelektu*, 2010, No. 1, pp. 38–42.
7. Encyclopedia of survey research methods / ed. P. J. Lavrakas. Thousand Oaks, Sage Publications, 2008, Vol. 1–2, 968 p. DOI: 10.1108/09504121011011879
8. Hansen M. H., Hurts W. N., Madow W. G. Sample survey methods and theory, Vol. 1, Methods and applications. New York, John Wiley & Sons, 1953, 638 p.
9. Kokren U., per. s angl. Sonina I. M.; pod red. Volkova A. G., Druzhinina N. K. Metody vyborochnogo issledovaniya. Moscow, Statistika, 1976, 440 p.
10. Ghosh S. ed. Multivariate analysis, design of experiments, and survey sampling. New York, Marcel Dekker Inc., 1999, 698 p.
11. Smith G. A deterministic approach to partitioning neural network training data for the classification problem : dissertation ... doctor of philosophy in business. Blacksburg, Virginia Polytechnic Institute & State University, 2006, 110 p.
12. Bernard H. R. Social research methods: qualitative and quantitative approaches. Thousand Oaks, Sage Publications, 2006, 784 p.
13. Chaudhuri A., Stenger H. Survey sampling theory and methods. New York, Chapman & Hall, 2005, 416 p.
14. Subbotin S. O., Oliynyk A. O.; pid zag. red. prof. S. O. Subbotina Intelektual'ni systemy : navch. posib. Zaporizhzhya, ZNTU, 2014, 218 p.
15. Birger I. A. Tekhnicheskaya diagnostika. Moscow, Mashinostroenie, 1978, 240 p.

# ПРОГРЕСИВНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

## ПРОГРЕССИВНЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

### PROGRESSIVE INFORMATION TECHNOLOGIES

УДК 004.9

Литвин В. В.<sup>1</sup>, Бобик І. О.<sup>2</sup>, Висоцька В. А.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри «Інформаційні системи та мережі» Національного університету «Львівська політехніка», Львів, Україна

<sup>2</sup>Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедри «Вищої математики» Національного університету «Львівська політехніка», Львів, Україна

<sup>3</sup>Канд. техн. наук, доцент кафедри «Інформаційні системи та мережі» Національного університету «Львівська політехніка», Львів, Україна

### ЗАСТОСУВАННЯ СИСТЕМИ АЛГОРИТМІЧНИХ АЛГЕБР ДЛЯ ГРАМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ СИМВОЛЬНИХ ОБЧИСЛЕНИЬ ВИРАЗІВ ЛОГІКИ ВИСЛОВЛЮВАНЬ

Розроблено архітектуру та реалізовано програмну систему граматичного аналізу схем системи алгебраїчних алгебр та їх інтерпретації. Програмна система дає змогу автоматизовано генерувати програми за такими створеними схемами та їх відлагоджувати у відповідних схемах. Визначено чіткий розподіл системи алгебраїчних алгебр на окремі модулі, кожен з яких характеризується своїм функціональним навантаженням. Використано методи синтаксичного аналізу для розроблення та подання граматики таких схем. Реалізовано автоматичне їх перетворення в спискову форму. Розроблено машини системи алгебраїчних алгебр як абстрактний механізм інтерпретації граматики засобами синтаксичного аналізу. Словник  $V$  складається з скінченої не порожньої множини лексических одиниць. Вираз над  $V$  є ланцюжком скінченої довжини лексических одиниць із  $V$ . Порожній ланцюжок, який не містить лексических одиниць, позначимо через  $\Lambda$ . Множина всіх лексических одиниць над  $V$  позначимо  $V'$ . Мова над  $V$  є підмножиною  $V'$ . Мову задають через множину всіх лексических одиниць мови або через означення критерію, якому повинні задовільнити лексичні одиниці, щоб належати мові. Це є один важливий спосіб задати мову – через використання породжувальної граматики. Граматика складається з множини лексических одиниць різного типу та множини правил або продукції побудови виразу. Граматика має словник  $V$ , який є множиною лексических одиниць для побудови виразів мови. Деякі лексичні одиниці словника (терміналні) не можуть замінятися іншими лексическими одиницями. Текст реалізує структурно подану діяльність, що передбачає суб'єкт і об'єкт, процес, мету, засоби і результат, які відображаються в змістово-структурних, функціональних, комунікативних показниках. Одниницями внутрішньої організації структури тексту є алфавіт, лексика (парадигматика), граматика (синтагматика), парадигми, парадигматичні відношення, синтагматичні відношення, правила ідентифікації, висловлювання, між фразовою єдністю та фрагменти-блоки. На композиційному рівні виділяють речення, абзаци, параграфи, розділи, глави, підглави, сторінки тощо, які, крім речення, побічно пов'язані з внутрішньою структурою, тому не розглядаються. За допомогою бази даних (бази термінів/морфем і службових частин мови) та визначених правил аналізу тексту виконують пошук терміну. Синтаксичні аналізатори працюють в два етапи: ідентифікують змістовні лексеми та створюють дерево розбору.

**Ключові слова:** текст, україномовний, алгоритм, контент-моніторинг, ключові слова, лінгвістичний аналіз, синтаксичний аналіз, породжувальні граматики, структурна схема речення, інформаційна лінгвістична система.

#### НОМЕНКЛАТУРА

САА – системи алгоритмічних алгебр;

ІС – інформаційна система;

ООП – об'єктно-орієнтоване програмування;

ПО – предметна область;

LL( $k$ ) граматика яке підмножина контекстовільних граматик для LL-аналізатора як низкосхідного алгоритму синтаксичного розбору; цифра  $k$  – кількість лексем для розбору;

© Литвин В. В., Бобик І. О., Висоцька В. А., 2016

DOI 10.15588/1607-3274-2016-4-10

$A$  – команда типу термінал або семантичні процедури перетворення САА-схеми у формулу цієї схеми;

$V$  – умова виконання команди;

$B$  – команда типу нетермінал;

$K$  – команда, яка формує логічний результат перевірки у вигляді глобальної логічної змінної САА-машини;

$L$  – команда пересуває вказівник схеми на кількість символів в тексті команди у випадку збігу його з вхідним потоком;

*I* – забезпечує візуалізацію тексту повідомлення на екрані у вікні повідомень САА-машини;

*W* – команда обчислення складеної логічної умови в LL(k)-граматиці або САА-схемах;

*E* – логічна константа, яка тодіжно істинній логічній умові;

*X* – забезпечує послідовне виконання команд автомата;

ДНФ – диз'юнктивна нормальна форма;

БД – база даних;

DFD – діаграма потоків даних (англ. Data Flow Diagram);

$A_1$  – установку індексу масиву  $i = 1$ ;

$A_2$  – перестановка місцями елементів масиву з індексами  $i, i + 1$ ;

$A_3$  – збільшення індексу масиву на  $i$  на одиницю;

$\alpha_1$  – умова виконання операторів, де  $\alpha_1 = 1$ , якщо індекс масиву дорівнює  $n - 1$ , де  $n$  – розмірність масиву,  $\alpha_1 = 0$  в іншому випадку;

$\alpha_2$  – умова виконання операторів, де  $\alpha_2 = 0$ , якщо елемент масиву з індексом  $i$  більше елемента масиву з індексом  $i + 1$ ,  $\alpha_2 = 1$  в протилежному випадку.

## ВСТУП

Алгебра алгоритмів досліджує властивості алгоритмів [1–2]. Теорія САА вивчає і буде алгебри алгоритмів або алгоритмічні алгебри [3–4]. Основними поняттями алгебри алгоритмів є операції над множинами, булеві операції, предикати, функції й оператори; бінарні і п-арні відношення, еквівалентність, частково і цілком упорядковані множини; графи-схеми й операції над графовими структурами; операції сигнатури САА, аксіоми і правила визначення властивостей програм на основі стратегій згортання, розгортання і їх комбінацій; методи синтаксичного аналізу структурних програм і символне опрацювання

[5–9]. Операції алгебри задовольняють аксіоматичні закони асоціативності, ідемпотентності, комутативності, виключення третього і суперечності [1–4]. Застосування САА найчастіше проводиться в теорії секвенційних алгоритмів і проектуванні ІС; редактори формул алгоритмів і аналіз синтаксису та семантики алгебри алгоритмів-секвенцій, засобах еквівалентних перетворень алгоритмів; методах підвищення ефективності математичного моделювання алгоритмів ІС; принципах побудови електронної бібліотеки абстрактних алгоритмів [10–14]. Практичним результатом досліджень САА є побудова оригінальних інструментальних систем проектування програм на основі сучасних засобів підтримки ООП (Rational Rose), в тому числі і для граматичного аналізу символічних обчислень виразів логіки висловлювань на основі синтаксичного аналізу текстових масивів даних [10–14].

## 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Функціональність системи синтаксичного аналізу складається з таких складових:

- механізм синтаксичного аналізу та відлагодження опрацьованої САА-схеми у вигляді абстрактної САА-машини;

- опис граматики САА-мови та формул САА-схеми, перетворення граматики у спискову форму подання;

- генерація коду за САА-схемою, результатом чого є формульне подання САА-схеми;

- механізм інтерпретації формул САА-схеми, виклик та реалізація семантичних процедур.

Для цих задач створена абстрактна САА-машина з певним набором команд для задач синтаксичного аналізу. Через аналогію в поданні LL(k)-граматик та формул САА-мови такий механізм можна використати в якості не лише генератора коду, але й для тестового відлагодження САА-програм. На рис. 1 подана схема функціонування САА-машини в процесі синтаксичного аналізу

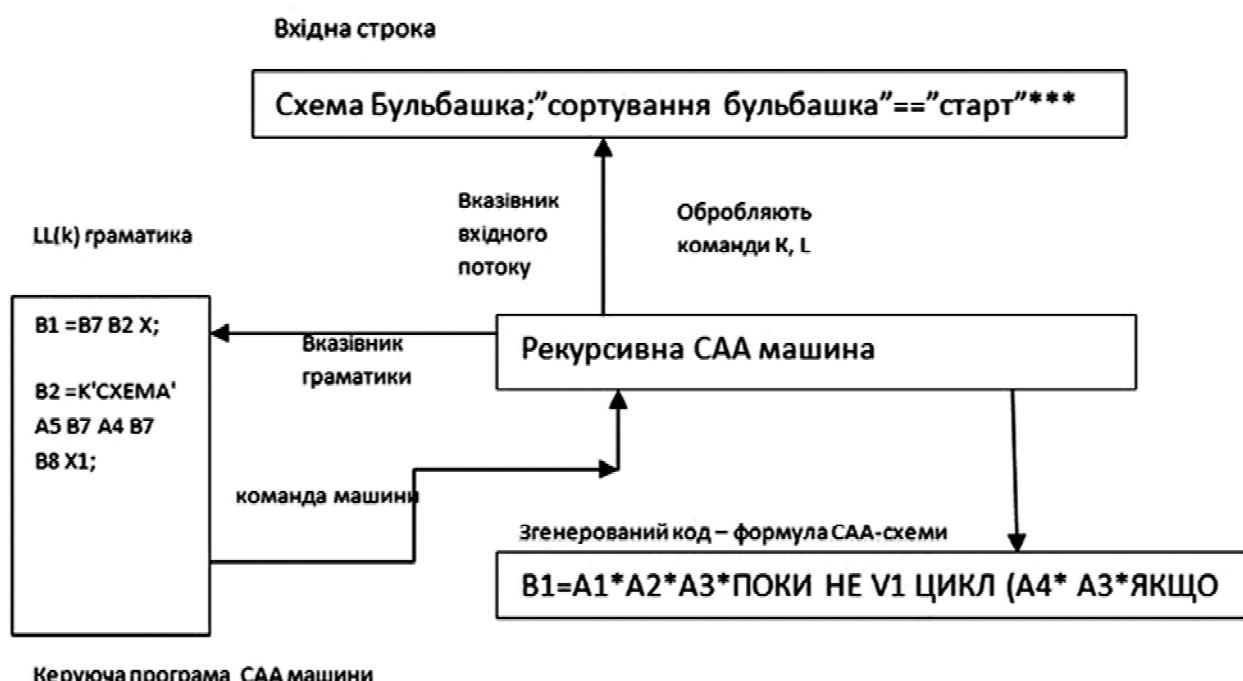


Рисунок 1 – Схема функціонування САА-машини

САА-схеми та побудови її формули. По вхідній стрічці (на рис. 1 схема сортування бульбашка) пересувається вказівник вхідного потоку, його зсув задається командою L-граматики. LL(k)-граматика для опису синтаксису САА-схем є керуючою програмою для САА-машини. Попередньо, до початку синтаксичного аналізу та трансляції, САА-машина перетворює описану граматику у спискову форму. По LL(k)-граматиці рухається вказівник граматики, його пересування визначається командами послідовного виконання команд САА-машини, або залишається на місці при ідентифікації *B*. Механізм виконання команд типу *B* є рекурсивним, що реалізують через використання стеку команд САА-машини. На кожному кроці САА-машина обирає з граматики чергову її команду і виконує її. У випадку команд типу *A* САА-машина здійснює виклик окремого компонента, що задає реалізацію цих семантичних процедур у вигляді процедур та функцій мови програмування, на якій реалізована відповідна САА-машина. Семантичні процедури генерують формулу САА-схеми у відповідності з деревом виводу схеми і записують цю формулу у вихідну стрічку.

Описаний процес синтезу програми в деякій мові програмування за САА-схемами підтримується автоматично при наявності:

- абстрактної САА-машини із механізмом синтаксичного аналізу методом рекурсивного спуску;
- перетворювача описаної граматики згідно САА-схем у спискову форму;
- інтерпретатор граматики мови згідно САА схем;
- інтерпретатор граматики формул згідно САА-схем;
- генератор формул згідно САА-схем, який реалізує набір семантичних процедур, що задають процес побудови формул схем.

В основі проектування ІС лежить моделювання ПО. Для отримання адекватного проекту ІС у вигляді системи правильно працюючих програм, необхідно мати цілісне, системне уявлення моделі, яке відображає всі аспекти її функціонування. При цьому під моделлю ПО є система, яка імітує структуру або функціонування досліджуваної ПО і відповідає основній вимозі – бути адекватною цій області. Інформаційна модель системи символьних обчислень в логіці висловлювань повинна вміти:

- розпізнавати вирази логіки висловлювань;
- здійснювати еквівалентні перетворювання над ними, генеруючи покроковий звіт щодо процесу перетворення;
- у випадку некоректно введених даних генерувати звіти про помилки з поясненнями;
- зберігати статистику виконань програми;
- відображати результати роботи користувачу у зрозумілому для нього вигляді.

## 2 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Синтаксис структурованих та змістовних текстових масивів даних реалізують через сукупність правил для побудови формул та розпізнавання правильних формул серед послідовностей символів [1–4]. Для системи символьних обчислень усі операції логіки висловлювань, окрім заперечення, є бінарними. На цьому і базується синтаксичний аналізатор. Синтаксичний аналіз реалізують через процес аналізу вхідної послідовності символів з метою розбору граматичної структури відповідно до

заданої формальної граматики. Синтаксичний аналізатор (або парсер, англ. parser) є програмою або частиною програми для виконання синтаксичного аналізу текстових масивів даних [10–14].

Під поняттям синтаксичного розбору розуміють розбиття тексту на складові частини мови з фіксацією їхніх форм, призначення і синтаксичного зв'язку з іншими частинами. Це визначається на етапі аналізу відмінків і позиціювання частин відповідної мови, які є складними для формалізації у флексивних мовах, наприклад таких, як українська.

Термінальний ланцюжок як речення таких мов розібрати програмно нелегко. Наприклад, у структурі людської мови є суттєві неоднозначності (особливо в розмовній), тобто слова і вирази, які передають зміст у великій кількості варіантів, але тільки одне зі значень доречне в конкретному випадку. Успіх вибору правильного варіанту переважно залежить від багатьох факторів контекстного змісту, і передбачити їх всі неможливо. Важко підготувати формальні правила для опису неформальної поведінки. Хоча існують і строгі правила, множина яких утворює базу граматики як основи синтаксичного аналізатора. Під час синтаксичного аналізу текст перевертують у структуру даних, найкраще для подальшого опрацювання – в дерево згідно синтаксичної структури вхідної послідовності. Зазвичай синтаксичні аналізатори працюють в три етапи: ідентифікують змістовні лексеми або токени (лексичний аналіз або токенізація), створюють дерево розбору та аналізують дерево (парсер).

Токеном є послідовність одного чи більше символів, які виділяють як атомарний об'єкт. Виділяють токени на основі базових правил лексичного аналізатора (лексера), які відрізняються в залежності від області застосування [10–14]. Токени часто класифікують за розташуванням символів у послідовності знаків чи контексту в потоці даних. Це не виділення групи символів, які обмеженні розділовими знаками з обох сторін (пробілами чи знаками пунктуації). Токени визначають правилами лексера і включають граматичні елементи мови (категорії іменників, дієслів, прикметників або знаків пунктуації), що використовують в потоці даних, в подальшому опрацюванні токенів синтаксичним аналізатором або іншими функціями в програмі. До завдань лексичного аналізу належать:

1. Перетворення набору символів тексту у послідовність токенів.
2. Виділення кожного токену як логічної частини тексту (ключове слово, ім'я змінної, знак пунктуації тощо).
3. Встановлення відповідності між токеном і лексемою – конкретний текст токена («for» «variable», «;» тощо).
4. Виділення додаткових атрибутів токена (наприклад, значення змінної).
5. Формування послідовності токенів на вихіді для парсера в якості вхідних даних.

Лексичний аналізатор зазвичай нічого не робить з комбінацією ідентифікованих токенів. Для прикладу, типовий лексичний аналізатор розпізнає дужки як знаки, але не перевіряє, чи кожному символу відповідає інший символ. Це завдання є для парсера.

### 3 МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ

Метою розробки системи є створення додатку для спрощення формул в логіці висловлювань (рис. 2). Усі задачі ІС поділені на такі групи: отримання вхідних даних від користувача та приведення їх до вигляду, зрозумілого системі; виділення і категоризація лексем виразів логіки висловлювань; перевірка синтаксичної валідності виразів логіки висловлювань; зведення формул до нормальної форми та їх мінімізація; порівняння перетворених формул на еквівалентність; генерування результатів та відображення їх користувачу. Кожна задача є самостійною програмною одиницею і реалізована модульно. В залежності від кількості виділених рівнів операцій, ІС поділяється на підсистеми (рис. 3):

- підсистема відображення даних, яка забезпечує взаємодію користувача з ІС: введення вхідних даних чи керуючих команд, виведення і форматування результату;
- підсистема ядра системи, яка реалізує основну логіку САА, тобто множину функцій, що аналізують та перетворюють вхідні дані, виконують обчислення і формують результат;
- підсистема управління даними, яка забезпечує зберігання даних в БД та доступ до них.

Ядро ІС складається з таких основних класів (рис. 4).

1. **Клас Main** є основним та має механізм зчитування вхідних даних від користувача. З цього класу створюють і викликають інші класи в порядку застосування перетворень вхідної стрічки. Присутній метод isDNF з тієї причини, що вихідний вираз після синтаксичного опрацювання може бути зразу заданий у вигляді ДНФ, відповідно відпадає потреба створювати об'єкт класу DNFMaker, що

значно зекономить ресурси. Оскільки цей клас є головним, його зв'язки є суто асоціативними, які служать для взаємозв'язків між класами, є базовим семантичним елементом і структурою для багатьох типів з'єднань між об'єктами. Асоціації є тим механізмом, який надає об'єктам змогу обмінюватися даними між собою. Вони мають призначення і є одно- (лише один з об'єктів знає про існування іншого) чи двосторонніми (у межах зв'язку кожен з об'єктів може надсилати повідомлення іншому). Кожен з кінців асоціації має значення численності, яке визначає кількість об'єктів на відповідному кінці асоціації, які можуть мати зв'язок з одним з об'єктів на іншому кінці асоціації. У даному випадку, зв'язки характеризуються як один-до-багатьох, тобто з одного об'єкту класу Main можна створити і тримати зв'язок з декількома об'єктами класу Parser і класу DNFMaker. Або у зворотному випадку, кожному об'єкту класу Parser чи класу DNFMaker відповідає лише один об'єкт класу Main.

2. **Клас Parser** приймає стрічку виразу і повертає значення true, якщо вираз є синтаксично правильним і false в іншому випадку. Метод analize () є ядром самого парсера, в основі якого покладений алгоритм LL(1) Parser з використанням логіки подання формальних мов контекстно-вільних граматик, що ділять весь алфавіт на терміналні (клас Token) і нетерміналні (клас NonTerminal) символи. Правильність виразів визначають за допомогою стеку аналізатора (параметр stash) і вхідного виразу (expression) шляхом поступового застосування правил нетерміналів у стеку. Okрім зв'язку з об'єктом класу Main, клас Parser має ще один асоціативний зв'язок типу один-до-одного з класом Lexer.

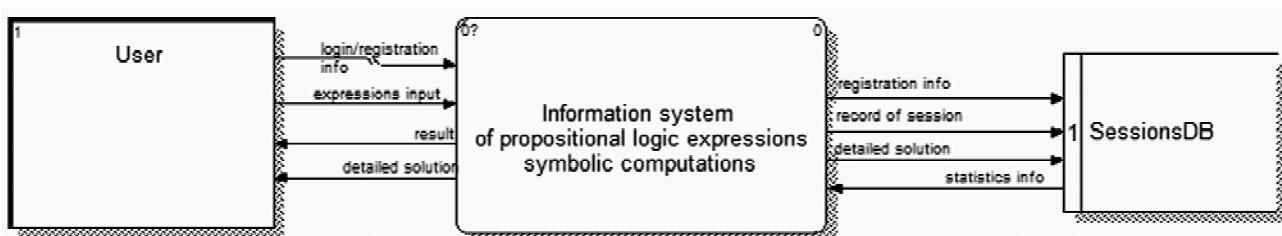


Рисунок 2 – Контекстна DFD ІС символічних обчислень виразів в логіці висловлювань

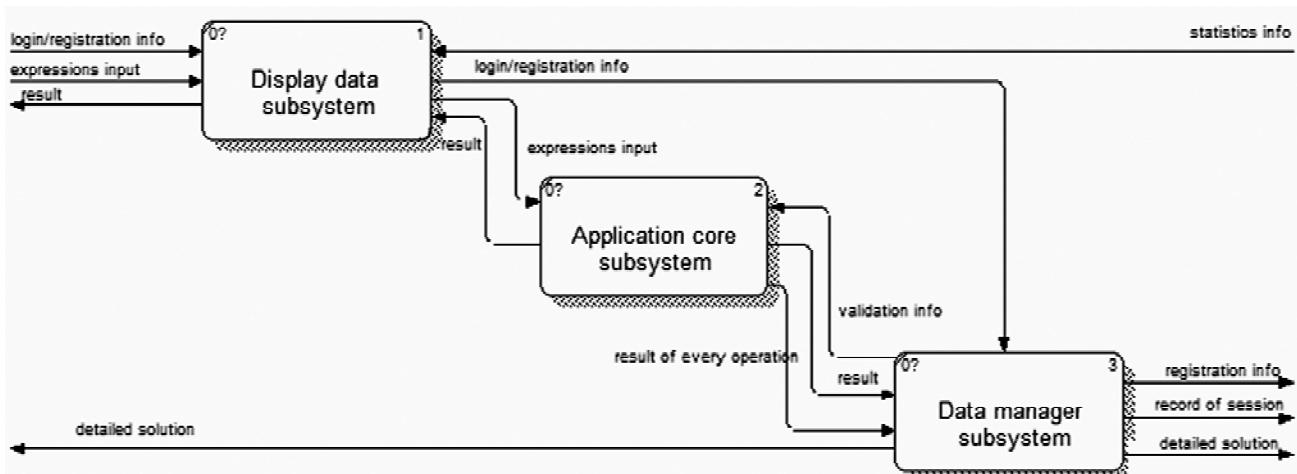


Рисунок 3 – Декомпозиція процесу символічних обчислень виразів в логіці висловлювань

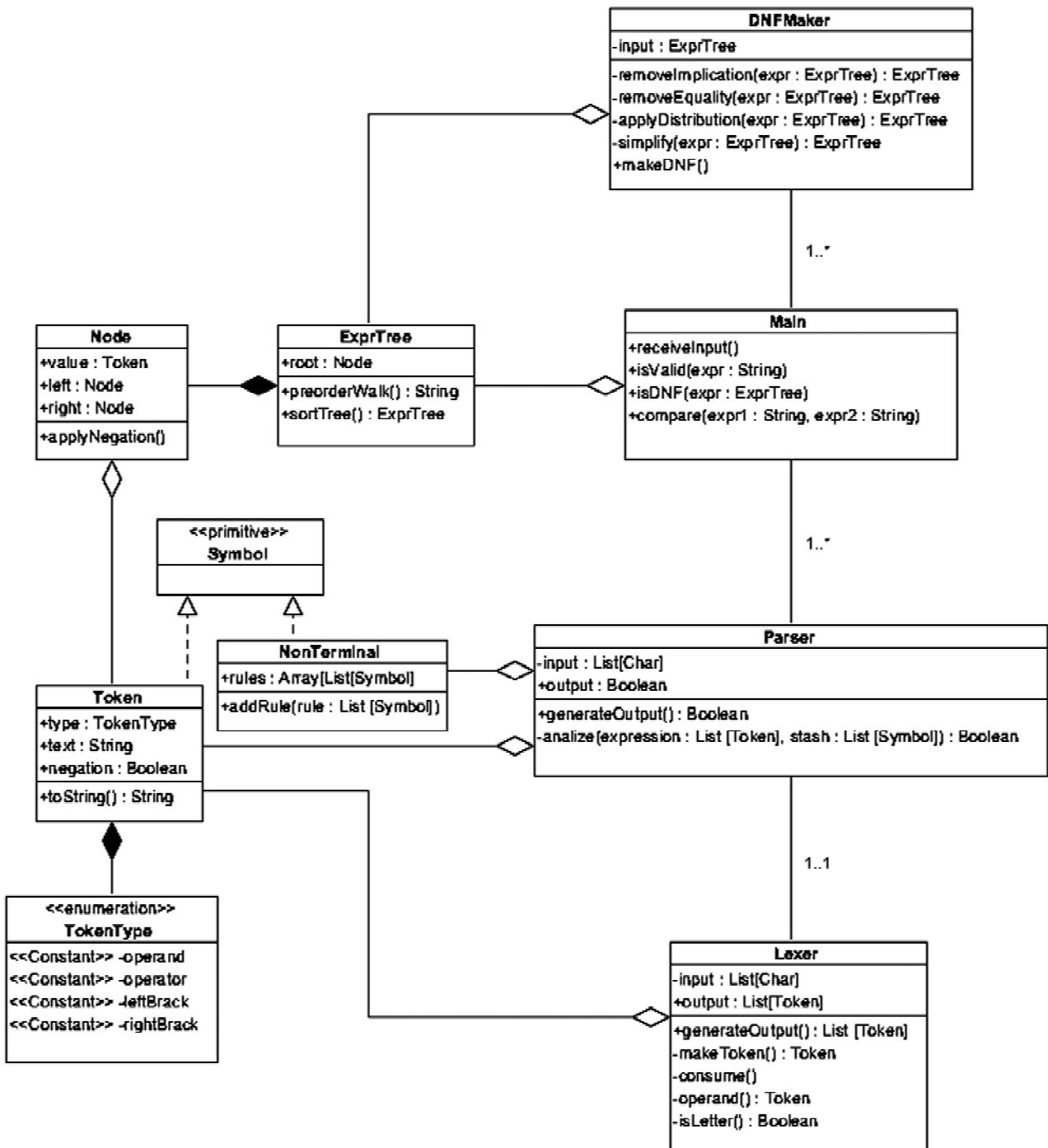


Рисунок 4 – Діаграма класів ядра ІС символічних обчислень в логіці висловлювань

3. Клас **Token** – це клас атомарного висловлювання, яке є одним з переліку (**TokenType** extends Enumeration), клас є сильно залежною сутністю, тому його зв’язок з класом **Token** характеризується як *композиційний*, або дуже сильно агрегаційний): операнд (operand), оператор (operation), ліва дужка (leftBrack) або права дужка (rightBrack). Поле `text:String` відображає ім’я операнда (якщо токен є операндом), знак операції (якщо токен є операцією або символом), для відкритої і для закритої дужки відповідно. Додаткове поле `negation: Boolean` має значення true якщо заперечення над токеном існує і false в

іншому випадку. Клас має зв’язок типу *агрегації*, яка є особливим типом асоціацій, де два класи із зв’язком не є рівнозначними, тобто зв’язок типу “ціле-частини”. За допомогою агрегації описують, яким чином клас у ролі цілого складається з інших класів у ролі частин. У агрегаціях клас у ролі цілого завжди має численність рівну одиниці.

4. Клас **NonTerminal** для нетерміналів, кожен об’єкт якого містить свій набір правил `rules`, що подані виглядом послідовності термінальних і нетермінальних символів. Цей клас разом з класом **Token** є нащадками абстрактного класу **Symbol** (для визначення об’єднуючого

типу термінальних (токенів) і нетермінальних символів, оскільки стек аналізатора міститиме об'єкти як одного так і іншого класу.

5. **Клас Lexer** приймає стрічку виразу і повертає той же вираз, розділений на токени: операнди, операції та дужки. Метод `makeToken()` є ключовим, в основі якого є алгоритм LL(1) Lexer. Додаткові методи `operand()` і `isLetter` призначенні для коректного виділення змінних виразу, що складаються з більше, ніж одного символу.

6. **Клас DNFMaker** перетворює правильний вираз у ДНФ методом `makeDNF`.

7. **Клас ExprTree** – клас типу виразу, над яким працює DNFMaker, оскільки для перетворення виразів використовувати форму дерева набагато зручніше. Дерево є бінарним із-за наявності лише бінарних операцій (унарне заперечення є як атрибут самого токена). Метод `sortTree()` є завершальним методом, і його призначення, використовуючи закони комутативності, відсортувати операнди в визначеному (наприклад, алфавітному порядку) для подальшої зручності посимвольного порівняння.

8. **Клас Node** є складовим класу ExprTree у вигляді однієї вершини. Поля `left` і `right` є вказівниками на лівого та правого сина вершини відповідно. Метод `applyNegation` є атомарним застосуванням закону подвійного заперечення, якщо `value.negation == true`, або запереченню значення вершини в іншому випадку.

На рис. 5 подана діаграма діяльності ядра IC символічних обчислень в логіці висловлювань, яка складається з наступних етапів.

1) Отримання вхідних даних (ввід користувачем виразів та перетворення їх до відповідного вигляду для опрацювання IC).

2) Перевірка виразу на коректність – це робота лексера і парсера системи, по завершенні якої відомо, чи вираз є коректним, і система продовжує роботу. В іншому випадку допущені помилки, через які система не зможе коректно опрацювати ці вирази. Тоді IC генерує звіт про помилку (який тип та місце помилки) і завершує свою роботу.

3) Створення дерева виразу (перетворення стрічкового виразу у бінарне дерево, при цьому дужки упускаються, адже послідовність виконання виразів диктується їх положенням у дереві, з яким потім працюватиме DNFMaker).

4) Перевірка чи вираз є у ДНФ. Якщо ні, то виконання кроку 5, інакше – кроку 6.

5) Застосування закону еквівалентних перетворень та перехід до кроку 4. Цикл триватиме доти, поки у дереві не залишиться кон'юктивних вузлів на вищих рівнях.

6) Сортування клауз, використовуючи закони комутативності (посортувати операнди в визначеному порядку для подальшої зручності посимвольного порівняння).

7) Перевірка на рівність (посимвольне порівняння заданих виразів).

8) Генерування результатів (підтвердження або спростування рівності виразів).

Синтаксичний аналізатор реалізований як абстрактний автомат, який здійснює виконання певного набору команд. Його основним завданням є проаналізувати заданий вхідний символний рядок на належність до мови, яка описується LL(k) граматикою, і являє собою програму роботи автомата. Завдяки аналогічності форм подання формул САА-схем і LL(k)-граматик даний автомат, окрім виконання функції граматичного аналізатора, здат-

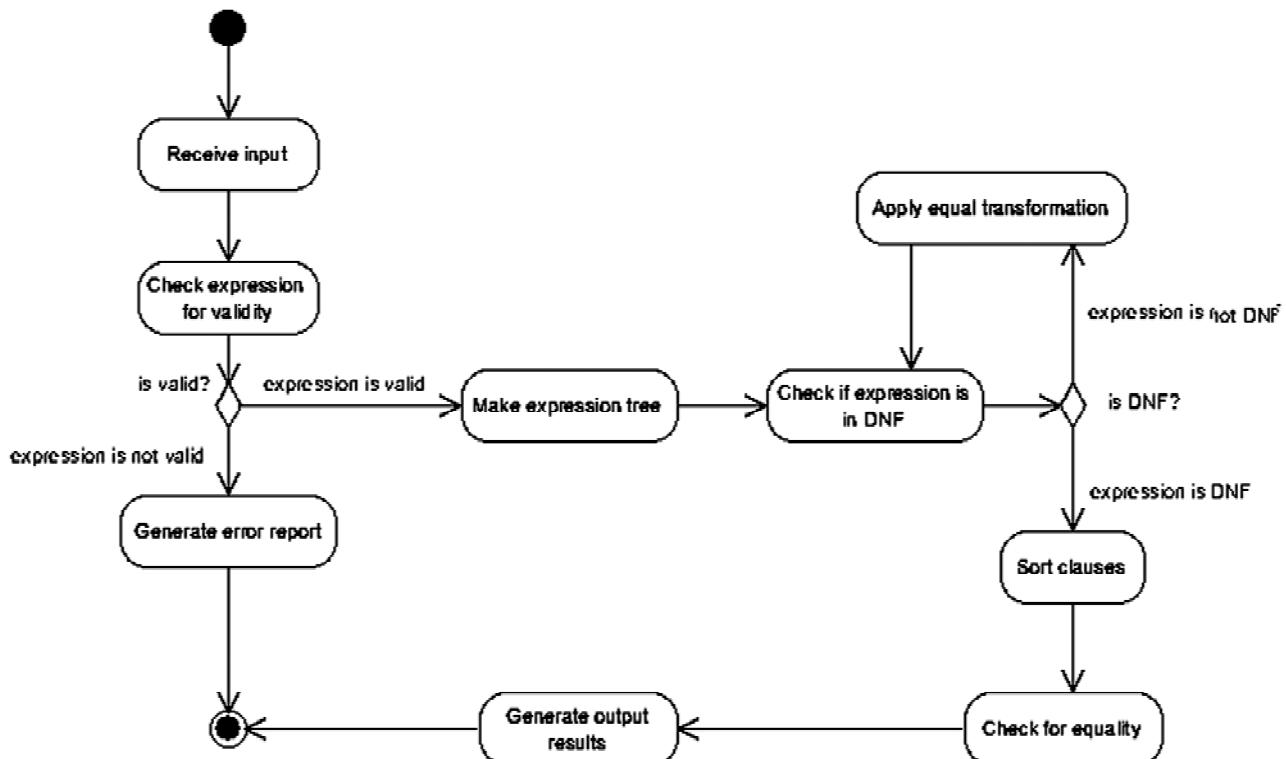


Рисунок 5 – Діаграма діяльності ядра IC символічних обчислень в логіці висловлювань

ний здійснювати інтерпретацію САА-схем. Тому опис команд нeterміналу з порядковим номером **<код>** в граматиці або складеного оператора в САА-схемі;

– ***A<код>, V<код>*** є командами виклику відповідної семантичної процедури, яка забезпечує трансляцію вхідного рядка у вихідний при побудові дерева виведення, або виконання оператора (предиката) САА-схеми, що заданий процедурою/функцією обраної для синтезу мови програмування;

– ***L ‘текст’ і K ‘текст’***, які задають порівняння фрагменту вхідного рядка з текстом, заданим в лапках команди *L, K*. При збігу цих фрагментів команда *K* формує логічний результат перевірки у вигляді глобальної логічної змінної САА-машини, а команда *L* додатково ще й пересуває вказівник схеми на кількість символів в тексті команди у випадку збігу його з вхідним потоком. Ці команди спеціалізовані для символьного опрацювання, тому переважно використовуються в режимі інтерпретації LL(k)-граматик;

– ***I ‘текст повідомлення’***, що забезпечують візуалізацію тексту повідомлення на екрані у вікні повідомлень САА-машини.

– ***W<код>*** для обчислення складеної логічної умови в LL (k)-граматиці або САА-схемах;

– ***логічна команда & <операнд 1> ... <операнд N> XL*** задає обчислення кон'юнкції зазначених операндів логічного типу, перелічених без будь-яких додаткових розділових символів і читаються до послідовності символів *XL*;

– ***логічна команда ! <операнд> ... <операнд> XL*** задає обчислення диз'юнкції зазначених операндів логічного типу, перелічених без будь-яких додаткових розділових символів і читаються до послідовності символів *XL*;

– ***логічна команда -<операнд>*** задає обчислення заперечення вказаного логічного операнда; у всіх логічних командах операндами можуть бути команди *L, K, V*, або вкладені один в одного зазначені логічні команди *!, &, -;*

– ***послідовне виконання команд автомата X***; задається їх послідовним записом без розділових знаків (цими командами є тільки команди типу *A, B, I*); їх послідовність завершує команда *X*; Така послідовна гілка (*альтернатива*) задає одне правило підстановки для нетермінала граматики. Весь набір правил підстановки для конкретного нетермінала задається списком альтернатив і з точки зору імплементованої програми є конструкцією SWITCH.

– ***альтернативне виконання*** визначає виконання послідовних фрагментів програми (так званих альтернатив) в залежності від значення логічної умови, що стоять на

початку кожної альтернативи. У випадку LL(k)-граматик кількість альтернатив є довільна, і виконується та альтернатива, в якої умова входу в альтернативу виявилася істинною першою. При інтерпретації САА-схем альтернативне виконання здійснюється як оператор

**ЯКЩО <умова входу 1> то <гілка 1> ІНАКШЕ <гілка 2>;**

– ***циклічне виконання*** послідовного фрагмента програми автомата записується у вигляді **C <логічний вираз> XL <послідовна гілка> X**; та забезпечує багаторазове виконання послідовної гілки (альтернативи) при істинному значенні логічного виразу. У САА-схемах аналогічна конструкції має вигляд ПОКИ НЕ <логічний вираз> ЦІКЛ <послідовна гілка>;

– ***логічна константа E*** рівна тотожно істинній логічній умові.

У табл. 1 наведені приклади відповідності фрагментів граматик і внутрішнього подання формул САА-схеми у вигляді послідовностей команд САА-машини.

Програма автомата перед інтерпретацією перетворюється в спискову внутрішню форму, що складається з:

– *Граматики*, яка визначена як стрічка команд САА-машини без розділових знаків, при цьому тексти повідомлень та лексем в командах *K, L* внесені у окремі таблиці, а в граматиці зберігається тільки їх порядковий номер у відповідній таблиці.

– *Таблиці лексем*, де в *i* стрічці таблиці задано індекс лексеми команди *K<sub>i</sub>/L<sub>i</sub>* в стрічці символів, де підряд записані всі лексеми граматики без розділових знаків та довжина лексеми (кількість символів в ній).

– *Таблиці інформаційних повідомлень*, яка збудована аналогічно до таблиці лексем: в рядку таблиці задано індекс повідомлення команди в рядку символів, де підряд записані всі повідомлення граматики без розділових знаків, а також довжина повідомлення.

– *Таблиці опису складеної логічної умови* у вигляді логічного предикату з командаами диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення, яка задає індекс цього опису в стрічці граматики.

– *Таблиці опису альтернативи граматик* (гілки розгалуження в САА-схемі), яка визначає індекс початку опису альтернативи в рядку символів граматики.

– *Таблиці визначення нетерміналів* (складних операторів САА-схеми), кожний рядок якої складається з двох елементів – індексу таблиці опису альтернатив, де вказано початок першої альтернативи нетерміналу, та індексу таблиці опису альтернатив, де вказано початок останньої альтернативи цього нетерміналу в рядку граматики. Різниця між цими двома елементами визначає кількість альтернатив нетерміналу.

Таке внутрішнє подання будеться модулем САА-машини inner\_gram. Інтерпретація команд типу *B* здійснюється шляхом запам'ятовування в магазині адреси наступної за нею команди та переходу на виконання першої команди альтернативи цього нетерміналу. Поча-

Таблиця 1 – Таблиця перетворень з LL(k) граматики у САА схему

Форма опису LL(k)-граматики	Відповідна формула САА-схеми	Подання формули САА-схеми
$B_1 = L \text{ 'схема' } B_2 A_1 X;$ $K \text{ 'обєкт' } B_1 A_2 X; E X;$	$B_1 = \text{ЯКЩО } V_1 + V_2 \text{ TO } A_1$ $\quad \quad \quad \text{ІНАКШЕ } B_2;$	$B_1 = V_1 V_2 XL A_1 X;$ $E B_2 X;$
$B_2 = C \& L \text{ 'кінець' } K = 'XL A_2 X';$	$B_2 = \text{ПОКИ НЕ } V_3 \text{ ЦІКЛ } A_2;$	$B_2 = C V_3 XL A_2 X;$

ток цієї альтернативи обчислюють за номером нетерміналу, який задає індекс *Таблиці визначення нетерміналів альтернатив*, а та визначає початок опису кожної альтернативи цього нетерміналу в *Таблиці опису альтернативи граматик*. По завершенню інтерпретації реалізації  $B$ , яка наступає при виконанні команди команди  $X$ ; відбувається повернення на наступну за цим нетерміналом команду, адреса цієї команди вибирається зі стеку. Механізм інтерпретації команд  $B$  ідентичний механізму виклику процедури в мовах програмування.

Інтерпретація команд  $A$  та  $V$  здійснюється за допомогою виклику їх реалізацій, що задані у вигляді перемикачів SWITCH, де номер команди  $A$  задає умову входу в гілку перемикача операторів, а номер команди  $V$  – умову входу в гілку перемикача базових логічних умов. При цьому результат виконання логічної функції  $V$  зберігається в глобальній логічній змінній САА-машини. Інтерпретація логічних команд автомату здійснюється з використанням традиційної логіки мов програмування та глобальної логічної змінної САА-машини. Генерація програм по САА-схемі та набору реалізацій елементарних операторів та умов реалізують довільною мовою програмування, оскільки таке перетворення задається граматикою, і самі семантичні процедури цієї граматики просто визначають генерацію коду в обраній мові програмування. Заміна семантичних процедур однієї мови програмування на іншу викликає результат генерації коду та подання алгоритму в відповідній мові.

#### 4 ЕКСПЕРИМЕНТИ

Перераховані команди САА-машини є базовими для опису LL(k)-граматики САА-мови. При створенні цієї граматики враховувалася вкладеність конструкцій, наприклад,

$$\begin{aligned} B_1 &= B_7 B_2 X; \quad B_2 = K' \text{СХЕМА}' A_5 B_7 A_4 B_7 B_8 X; \\ &= E\Gamma \text{очікується ключове слово СХЕМА}' B_{45} X; \\ B_8 &= K';' A_1 B_7 B_3 X; \quad = E\Gamma \text{очікується ;}' B_{45} X; \end{aligned}$$

Наведений фрагмент граматики аналізує заголовок схеми. Нетермінал  $B_1$  здійснює прохід через послідовність прогалин будь-якої довжини. Нетермінал  $B_2$  відповідає за аналіз ключового слова СХЕМА та ідентифікатора схеми. За перенесення слова СХЕМА в формулу цієї схеми відповідає семантична процедура  $A_5$ , а семантична процедура  $A_4$  визначає ідентифікатор схеми, присвоює схемі унікальний внутрішній ідентифікатор та записує його в формулу. У випадку відсутності ключового слова СХЕМА або помилки при його написанні команда  $K' \text{СХЕМА}'$  сформує хибне логічне значення, тому вибереться наступна за порядком альтернатива нетермінала  $B_2$  а саме:  $E\Gamma$  очікується ключове слово СХЕМА'  $B_{45} X$ . Ця альтернатива починається тотожно істинною логічною умовою  $E$ , тому командою  $\Gamma$  очікується ключове слово СХЕМА' друкується повідомлення про помилку та припиняється трансляція через синтаксичну помилку. Нетермінал  $B_4$  здійснює синтаксичний аналіз лівої частини рівняння. Стандартні ідентифікатори складеного оператора починаються символом  $B$ , складеної умови – символом  $W$ , змістовні ідентифікатори операторів подають в подвійних

лапках, а змістовні ідентифікатори складних умов подають в одинарних лапках, наприклад,

$$\begin{aligned} B_4 &= K'B' A_5 B_7 B_{10} B_7 B_8 X; = K''' A_0 A_9 A_0 B_7 B_{10} B_7 B_8 X; \\ &= K'W A_8 B_7 B_{11} B_7 B_8 X; = K''# A_0 A_{10} A_0 B_7 B_{11} B_7 B_8 X; \\ &= E\Gamma \text{невірний ідентифікатор в лівій частині рівняння}' B_{45} X; \end{aligned}$$

Наступний фрагмент граматики здійснює поглинання пробілів.

$$B_7 = K' ' A_1 B_{44} X; = E\Gamma \text{очікується пробіл}' B_{45} X; \quad B_{44} = K' ' A_0 B_{44} X; = EX;$$

Нетермінал  $B_3$  здійснює опрацювання тіла схеми з декількох рівнів проектування, заданих складними операторами та складними умовами. Ці рівні задаються окремими рівняннями з ідентифікаторами операторів чи умов в лівій частині рівняння та алгебраїчним виразами в САА в правій частині рівняння, наприклад,  $B_3 = K' \text{КІНЕЦЬ}' B_{45} X; = E\Gamma B_3 X$ .

Нетермінал  $B_{10}$  аналізує наявність знаку = перед правою частиною рівняння, що визначає складний оператор. Нетермінал  $B_{11}$  аналізує наявність знаку = перед правою частиною рівняння, що визначає складну умову. В правій частині рівняння використовують стандартні ідентифікатори операторів та логічних умов (складних і базових) та їх змістовні ідентифікатори. Відповідає за аналіз правої частини рівняння  $B_5$ . I-ідентифікатори схеми пов'язані між собою операціями алгебри розгалуження та циклу, наприклад,

$$\begin{aligned} B_{10} &= K' = ' A_1 B_7 B_5 B_7 B_6 X; = E\Gamma \text{очікується } = ' B_{45} X; \\ B_5 &= K'A'A_{11} X; = K'B'A_5 X; = K'''A_7 X; = K' \text{ПОКИ}' A_4 B_7 B_9 X; \\ &= K' \text{ЯКЩО}' A_4 B_7 B_{14} B_7 B_{12} X; = K'(' A_1 B_7 B_5 B_7 B_{13} X; \\ &= E\Gamma \text{невірний оператор в лівій частині рівняння схеми}' B_{45} X. \end{aligned}$$

Послідовне виконання (\*) опрацьовується нетерміналами  $B_6$  та  $B_{13}$ .  $B_{13}$  відповідає за фрагменти операторних виразів, взятих в дужки () .

$$\begin{aligned} B_6 &= K'^{*}' A_1 B_7 B_5 B_7 B_6 X; = K';' A_1 B_7 X; \\ &= E\Gamma \text{очікується * або ; в правій частині рівняння}' B_{45} X; \\ B_{13} &= K')' A_1 B_7 B_5 B_7 B_6 X; = K'^{*}' A_1 B_7 B_5 B_7 B_{13} X; \\ &= E\Gamma \text{очікується ) або * в правій частині рівняння}' B_{45} X; \end{aligned}$$

Нетермінал  $B_{12}$  аналізує продовження оператора розгалуження з ключового слова ТО

$$B_{12} = K' \text{ТО}' A_2 B_7 B_5 B_7 B_{15} B_7 X;$$

$= E\Gamma$  очікується продовження оператора ЯКЩО – операторна дужка ТО'  $B_{45} X$ ;

$B_{15}$  аналізує продовження оператора розгалуження з ключового слова ІНАКШЕ, тобто

$$B_{15} = K' \text{ІНАКШЕ}' A_6 B_7 B_5 B_7 B_6 X;$$

$= E\Gamma$  очікується операторна дужка ІНАКШЕ'  $B_{45} X$ ;

Наступний приклад описує аналіз рівняння для подання складної логічної умови.

$$\begin{aligned} B_{11} &= K' = ' A_1 B_7 B_{17} B_7 B_{18} X; \\ &= E\Gamma \text{очікується дорівнює в логічному рівнянні схеми}' B_{45} X; \\ B_{17} &= K' V A_{12} X; = K' W A_{13} X; = K''# A_8 X; \\ &= E\Gamma \text{невірний логічний операнд в логічній умові}' B_{45} X; \end{aligned}$$

$B_{18}$  описує операції логіки як диз'юнкцію (+), кон'юнкцію (.), заперечення (!), тобто

$$B_{18} = K' + A_1 B_7 B_{17} B_{18} X; = K' \cdot A_1 B_7 B_{17} B_{18} X; = K'! A_1 B_7 B_{17} B_{18} X; = K'; A_1 B_7 X;$$

Команда  $X\&$  відзначає кінець граматики.  $B_9$  аналізує фрагмент оператора циклу:

$$B_9 = K' \text{НЕ}' A_2 B_7 B_{14} B_7 B_{16} X; = E\Gamma \text{очікується НЕ в операторі циклу ПОКИ НЕ}' B_{45} X;$$

Аналогічно  $B_{16}$  продовжує аналіз оператора циклу з ключового слова ЦІКЛ, тобто

$$B_{16} = K' \text{ЦІКЛ}' A_4 B_7 B_5 B_7 B_6 X; = E\Gamma \text{очікується опера торна дужка ЦІКЛ}' B_{45} X;$$

Граматику програмою перетворюють в спискову форму та в масив команд САА-машини. Кожна команда визначається типом, заданим полем типу char та порядковим номером. Цей масив складається з послідовності альтернатив всіх нетерміналів. Для визначення початку опису конкретного нетерміналу в такому масиві створюються таблиці  $T_B$ , де зафіковані індекси масиву граматики як початок альтернатив. Всі термінальні слова (ключові слова схеми) зібрані в окрему стрічку. Для вибору ключового слова при синтаксичному аналізі номер терміналу при командах  $K, L$  задає індекс таблиці терміналів  $T_{TERM}$ . Остання є масивом записів, які складаються з індексу початку терміналу в спільній символійній стрічці та його довжини. Аналогічно побудована таблиця повідомень  $T_{INF}$ . Загальне вікно програми має 8 робочих областей та одну кнопку Translate, яка ініціює початок роботи системи (рис. 6).

Усі робочі області на рис. 6 пронумеровані для зручності пояснення.

1. Область для відображення введених початкових даних. Завантажують дані з текстового файлу за допомогою Open file. Вхідними даними є САА-схеми або граматика для САА-машини (завдяки подібності структур LL(k)-граматики та формул САА-схем, система володіє можливістю використання САА-машини як інтерпретатора САА-схем, так і створення тестового апарату для відлагодження САА-схем).

2. Відображення спискової форми граматики САА-схем. LL(k)-граматика в списковій формі є керуючою програмою для абстрактної машини з фіксованим набором команд, тобто є в певній мірі вхідними даними, але генеруються автоматично системою.

3. Таблиця граматики  $T_{TERM}$  (лексем або термінальних значень, які властиві заданій граматиці). Лексемами є ключові слова (СХЕМА, КІНЕЦЬ тощо), слова-оператори (ПОКИ, НЕ, ЯКЩО тощо), знаки логічних операторів тощо.

4. Таблиця повідомень  $T_{INF}$  зберігає повідомлення граматики, які призначенні для відображення у вихідній стрічці (робоча область 8), щоб повідомити користувача про синтаксичну помилку у схемі (якщо така виявленена).

5. Таблиця початків альтернатив  $T_B$ , які в робочій області 2. Кожна окрема альтернатива розміщується між двома командами типу  $X_i$  – вона відповідає команді граматики  $X_i$ . У таблиці зафіковані індекси масиву граматики, що є початками альтернатив.

6. Таблиця альтернатив  $T_{ALT}$  складається з двох полів: перше визначає індекс таблиці  $T_B$ , що фіксує початок в масиві граматики першої альтернативи нетерміналу, друге поле – індекс останньої альтернативи нетерміналу. Різниця між цими полями задає кількість альтернатив нетерміналу з номером, що є індексом таблиці  $T_{ALT}$ . Для розуміння організації граматики розглянемо для прикладу другу альтернативу з робочої області 2. Вона знаходиться між командами  $X_1$  і має вигляд  $K_0 A_5 B_7 A_4 B_7 B_8$ . Ця альтернатива відповідає правилу підстановки:  $K' \text{СХЕМА}' A_5 B_7 A_4 B_7 B_8$ . Командою  $K_0$  задана лексема СХЕМА в списковій формі. Тут 0 – це індекс лексеми в таблиці  $T_{TERM}$  (таблиця подана на інтерфейсній схемі під номером 3). Перша лексема (значення індексу 0) в цій таблиці і є ключовим словом СХЕМА. Альтернатива (1) починається в списковій формі за індексом 3. Ця альтернатива є першою в списку альтернатив нетерміналу  $B_2$  початкової форми граматики, яка зручна для її розуміння.

$B_2 = K' \text{СХЕМА}' A_5 B_7 A_4 B_7 B_8 X; = E\Gamma \text{очікується ключове слово СХЕМА}' B_{45} X;$

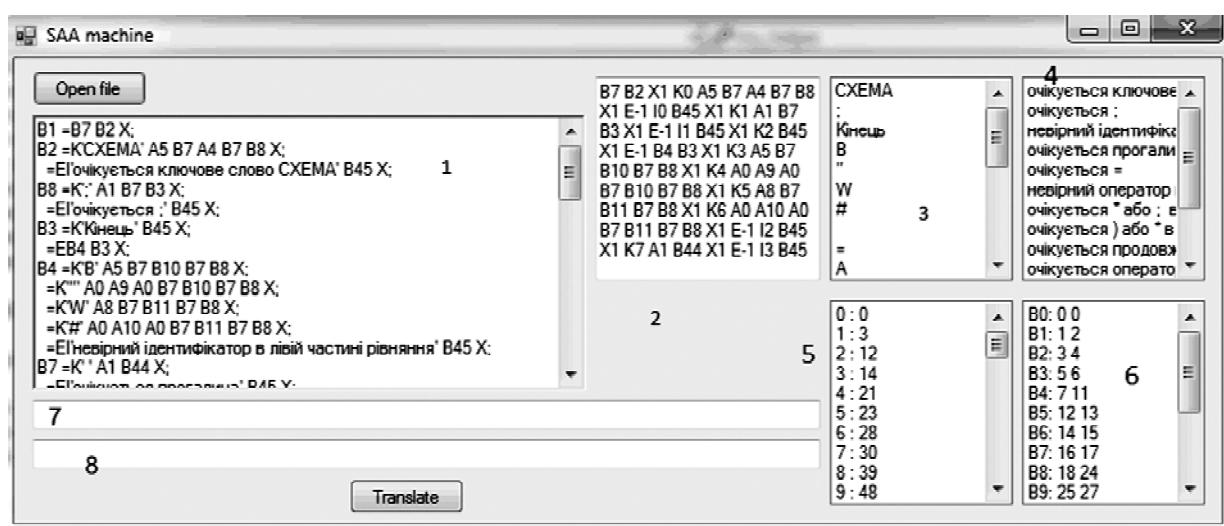


Рисунок 6 – Загальний вигляд робочого вікна системи

Альтернатива (1) розміщена в списковій формі граматики починаючи з індексу 3, вона є другою альтернативою граматики, тому за індексом  $i5=2-1=1$  (в таблиці 5 інтерфейсної схеми записано цей індекс). Так як ця альтернатива є першою альтернативою нетерміналу  $B_2$ , то по індексу  $i6=2-1=1$  таблиці 6 повинен бути записаний індекс  $i5$  таблиці 5. Цей індекс записується в перший елемент стрічки таблиці 6 з індексом  $i6$ , цей елемент в таблиці визначений як поле `beg_alt` – першої альтернативи. Наступна альтернатива:  $E-1\ I_0\ B_{45}$ . Вона є другою і завершальною альтернативою нетерміналу  $B_2$ . Початок її в граматиці задається індексом 12, цей індекс записаний в таблицю 5 в рядок 3 (індекс  $i5=2$ ). Так як це завершальна альтернатива нетерміналу  $B_2$ , то в таблицю 6 по індексу  $i6$  в другий компонент стрічки таблиці `T_ALT` заноситься індекс  $i5$ . Тому 2 рядок таблиці 6 має вигляд 1 2.

7. Вихідний рядок. Ця область призначена для відображення результату успішного завершення роботи програми, а саме – згенерованої формули САА-схеми.

8. Лог системи. У разі виявлення синтаксичних помилок, система припиняє свою роботу з виведеним повідомленням про причину з таблиці `T_INF` (робоча область 4).

## 5 РЕЗУЛЬТАТИ

Усі вказані таблиці заповнюються автоматично САА-машиною як генератора граматики із звичайного текстового файлу, який описує граматику за правилами LL(k)-подання. Далі, вони використовуються САА-машиною як синтаксичним аналізатором для прочитання і граматично-го розбору заданої САА-схеми.

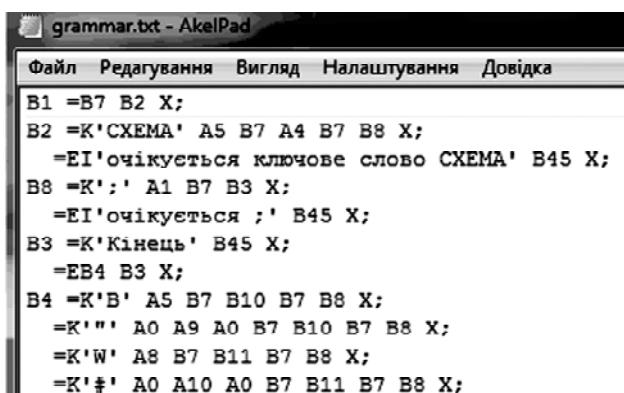
Роботу системи найкраще подати шляхом покрокового обчислення контрольного прикладу. Для цього використаємо алгоритм бульбашкового сортування. Для початку, розглянемо регулярну схему послідовного бульбашкового сортування по зростанню числового масиву записану в аналітичному вигляді, який зручний для формульного аналізу та перетворень. У наведеній регулярній схемі в явній формі подана алгоритмічна частина сортування, а дані в ній явно не вказуються, тобто  $\alpha_1\{A_1\} * \alpha_1\{\alpha_2(E \vee A_2) * A_3\}$ . Умови  $\alpha_1, \alpha_2$ ; оператори  $A_1, A_2, A_3$ , цієї схеми є базовими.

Для початку роботи необхідно ввести початкову граматику САА-схем, яка зможе повно описати мову. Для цього попередньо необхідно підготувати текстовий файл з правилами виведення LL(k)-граматики (рис. 7). Відкривши заданий файл у програмі системи (рис. 8), те саме наповнення появиться у найбільшій з робочих областей програми. Після введення даних запускають програму кнопкою `Generate`. Назва цієї кнопки міняється в залежності від поточної функції САА-машини. Оскільки на першому етапі основним завданням системи є граматичний розбір і побудова схем граматики, режимом САА-машини буде синтаксичний аналізатор. Однак при побудові САА-формул з САА-схем, САА-машина виконуватиме роль інтерпретатора, а тому і кнопка, що ініціюватиме запуск САА-машини матиме назву `Translate`. У випадку успішного завершення програми, у результаті буде створена граматика, за якою проводитиметься подальший аналіз САА-схем (рис. 9).

Наступний етап вимагає введення САА-схеми алгоритму бульбашкового сортування.

СХЕМА `babl`;

"`babl`" = "старт" \* "встановити вказівник  $B(1)$  перед початком масиву (MASS)"  
 \* "виконати  $FL=1$ "  
 \* "ПОКИ НЕ ' $FL = 0$ '"  
 ЦИКЛ ("виконати  $FL = 0$ "\*)



```

grammar.txt - AcePad
Файл Редагування Вигляд Налаштування Довідка
B1 =B7 B2 X;
B2 =K'СХЕМА' A5 B7 A4 B7 B8 X;
=EI'очікується ключове слово СХЕМА' B45 X;
B8 =K': A1 B7 B3 X;
=EI'очікується ;' B45 X;
B3 =K'Кінець' B45 X;
=EB4 B3 X;
B4 =K'B' A5 B7 B10 B7 B8 X;
=K''' A0 A9 A0 B7 B10 B7 B8 X;
=K'W' A8 B7 B11 B7 B8 X;
=K'#' A0 A10 A0 B7 B11 B7 B8 X;
=EI'невірний ідентифікатор в лівій частині рівняння' B45 X;
B7 =K' A1 B44 X;

```

Рисунок 7 – Текстовий файл граматики мови САА схем



Рисунок 8 – Введення граматики у систему

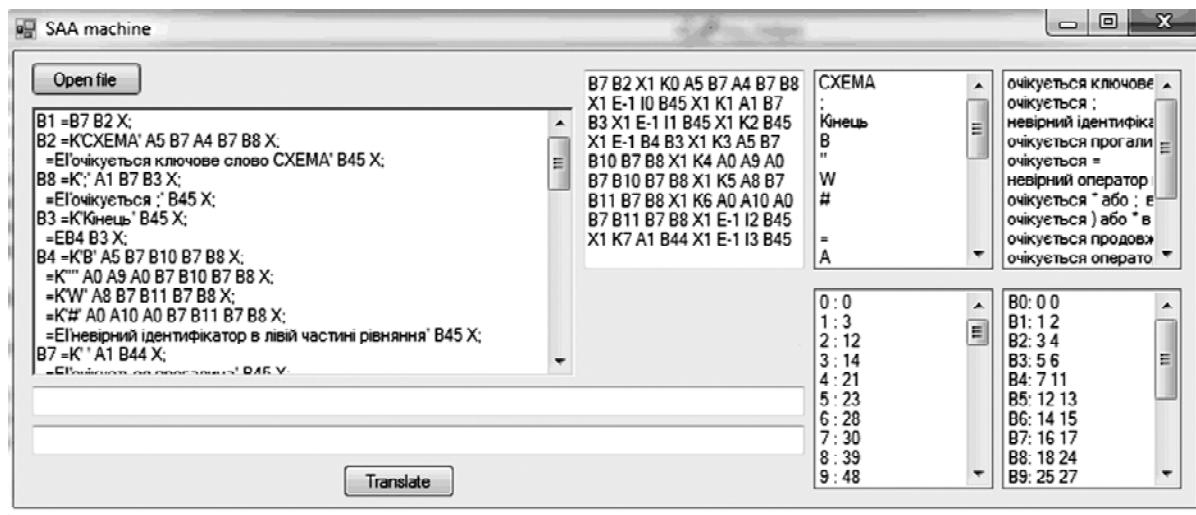


Рисунок 9 – Результат роботи синтаксичного аналізу

"встановити вказівник B(1) перед початком масиву (MASS)" \*

ПОКИ НЕ 'вказівник B(1) в кінці (MASS)'  
 ЦІКЛ ( ЯКЦО 'по B(1) елемент зліва L>R елемента справа в (MASS)'

ТО "переставити елементи L,R по B(1) місцями в MASS"

\* "виконати FL=1"  
 \* "зсунути Y(1) на (1) по (MASS) вправо")  
 \*  
 \* ФІН;  
 КІНЕЦЬ

Основними об'єктами мови САА опису регулярних схем алгоритмів є абстракції операторів і умов. При цьому в мові розрізняються елементарні оператори та умови і складені оператори та умови. Складені оператори та умови фіксують певні рівні проектування конкретної регулярної схеми. Аналогічно, основними абстракціями мови САА є складені і елементарні оператори та умови. Для подання складених і елементарних операторів, умов введені стандартні і смислові ідентифікатори. Ту ж саму САА-схему, змодифікувавши її під один з варіантів вдосконаленого бульбашкового сортування, подано у табличному вигляді (табл. 2) з вказанням номеру стрічки початків кожної з операцій. Задана схема подана одним рівнянням. Базисними елементарними операторами в ній є оператори, змістовні ідентифікатори, які починаються в рядках 1, 2, 5, 8, 11, 12. Базисні умови подані змістовними ідентифікаторами в рядках 4, 7, 10.

Таблиця 2 – Таблична схема вдосконаленого алгоритму бульбашкового сортування

№ стрічки	САА-схема
1	СХЕМА bable, удосконалена;
2	"Бульбашка / ВД" = "старт" *****
3	"Встановити вказівники B <sub>1</sub> та B <sub>2</sub> в кінець (mass)"
4	ПОКИ НЕ 'B (2) перед початком (mass)' ЦІКЛ
5	("Встановити B (1) перед початком (mass)"
6	*****
7	ПОКИ НЕ 'Відстань між B (2) і B (1) в (mass) дорівнює 0
8	ЦІКЛ ("Пересунути B (1) на (1) по (mass) вправо"
9	*****
10	ЯКЦО 'L по U (1)> R по B (1) в (mass)'
11	ТО "Поміняти місцями R по B (1)"
12	ІНАКШЕ "Зрушити B (1) на (1) по (mass) вліво" )
13	КІНЕЦЬ

## 6 ОБГОВОРЕННЯ

Вдосконалення звичайного бульбашкового сортування здійснюється за рахунок введення вказівника B (2), який фіксує відсортовану частину масиву з найбільшим його елементами. Вказівник B (1), який початково встановлений на початок масиву, за один прохід внутрішнього циклу зсувається від початку масиву до вказівника B (2), пересуваючи при цьому найбільший на цій ділянці елемент масиву на місце, що фіксується вказівником B (2). Після злиття вказівників B (1) і B (2), B (2) зсувається на один символ вліво, а B (1) встановлюється на початок масиву. У схемі на рис. 10 в змістовних ідентифікаторах використовують об'єкти в круглих дужках, які є параметрами відповідних цим ідентифікаторам операторів або умов. Наприклад, в оператор зі змістовним ідентифікатором «Пересунути B (1) на (1) по (mass) вправо» залежить від трьох параметрів: – вказівника B<sub>1</sub>; – величини зсуву по масиву (1); – імені масиву, по якому відбувається переміщення вказівника. При цьому реалізація такого оператора нагадує опис процедури із зазначенням цих трьох параметрів як формальних параметрів, тоді як змістовний ідентифікатор в схемі є викликом цієї реалізації із зазначенням фактичних параметрів. Такий виклик при синтезі програми може замінюватися як справжнім викликом реалізації операторів (у вигляді процедури), так і як вставлені фрагменти програми, що реалізують цей оператор, із заміною в цьому фрагменті формальних параметрів на фактичні (макрогенерація).

## ВИСНОВКИ

У роботі досліджено застосування САА для граматичного аналізу символьних обчислень виразів логіки висловлювань. САА-схема розглядається як входна стрічка синтаксичного аналізу. Цю стрічку під час трансляції переворюється у макет програми у вибраній мові програмування. Перетворення здійснено в процесі побудови дерева виведення і задано атрибутною граматикою мови САА-схем. Розроблено механізм синтезу програм за їх САА-схемою. Це було здійснено у вигляді абстрактної САА-машин. Ця машина через подібність механізмів порівневого проектування САА-схем та LL(k)-граматик може служити не тільки для задач синтезу, але й для

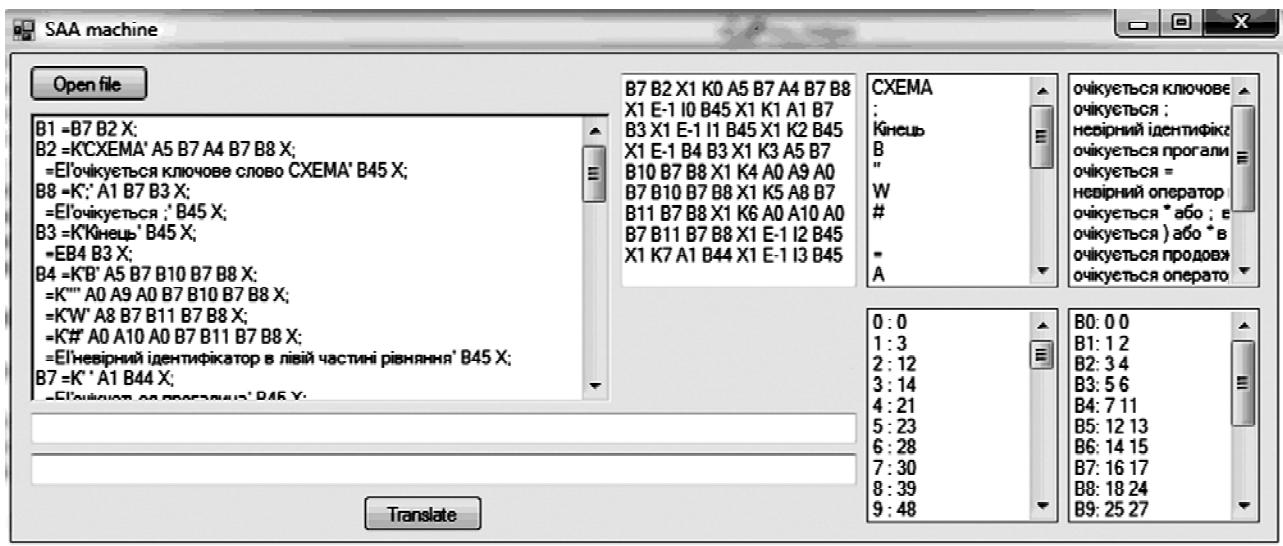


Рисунок 10 – Результат опрацювання САА схеми

інтерпретації (відлагодження) САА-схем програм. Розроблено інтелектуальну систему генерації програм за допомогою засобів синтаксичного аналізу в системах алгоритмічних алгебр Глушкова. Система здатна проводити синтаксичний аналіз та забезпечувати користувача повною інформацією про помилки, якщо такі будуть виявлені. Автоматично генерує подання граматики в списковому вигляді, що дає змогу реалізувати метод рекурсивного спуску без використання рекурсивних процедур. Синтаксичний аналізатор системи представлений у вигляді абстрактної машини з фіксованим набором команд, для якої LL(k)-граматика в списковій формі є керуючою програмою. Для імплементації ядра системи була використана об'єктно-функціональна мова програмування Scala. Функціональні частини були декомпоновані на окремі модулі, кожний з яких реалізовується окремим об'єктом у Scala-проекті. Результатом системи є формульне подання САА-схеми алгоритму. Така абстракція дозволяє на подальших етапах трансформації генерувати будь який алгоритм у задану мову програмування, за умови опису цією мовою базових компонент імплементації алгоритмів: операторів присвоєння, циклів, умови та логічних порівнянь. У майбутньому планується удосконалити систему шляхом її розширення для реалізації ширшого кола опрацювання мов програмування й задач, які пов'язані з САА.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- Глушков В. Методы символьной мультиобработки / В. Глушков, Г. Цейтлин, Е. Ющенко. – К. : Наук. думка, 1980. – 252 с.
- Глушков В. Алгебра. Языки. Программирование / В. Глушков, Г. Цейтлин, Е. Ющенко. – К. : Наук. думка, 1989. – 376 с.
- Лытвишин В. В.<sup>1</sup>, Бобык И. О.<sup>2</sup>, Высоцкая В. А.<sup>3</sup>
- <sup>1</sup>Д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедры «Информационные системы и сети» Национального университета «Львовская политехника», Львов, Украина
- <sup>2</sup>Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшей математики» Национального университета «Львовская политехника», Львов, Украина
- <sup>3</sup>Канд. техн. наук, доцент кафедры «Информационные системы и сети» Национального университета «Львовская политехника», Львов, Украина

## ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ АЛГОРИТМИЧЕСКИХ АЛГЕБР ДЛЯ ГРАММАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА СИМВОЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ВЫРАЖЕНИЙ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Разработана архитектура и реализовано программную систему грамматического анализа схем системы алгебраических алгебры и их интерпретации. Программная система позволяет автоматизировано генерировать программы по таким созданными схемами и их

Стаття надійшла до редакції 23.02.2016.  
Після доробки 04.03.2016.

отлаживать в соответствующих схемах. Определены четкое разделение системы алгебраических алгебры на отдельные модули, каждый из которых будет характеризоваться своим функциональным нагрузкам. Использованы методы синтаксического анализа для разработки и представления грамматики таких схем. Реализовано автоматическое ее преобразование в списочную форму. Разработан машины системы алгебраических алгебры как абстрактный механизм интерпретации грамматики средствами синтаксического анализа. Словарь  $V$  состоит из конечного не пустые множества лексических единиц. Выражение над  $V$  является цепочкой конечной длины лексических единиц с  $V$ . Прежний цепочки, не содержит лексических единиц, обозначим через. Множество всех лексических единиц над  $V$  обозначим. Язык над  $V$  является опилками. Язык задают через множество всех лексических единиц языка или через определение критерия, которому должны удовлетворять лексические единицы, чтобы принадлежать языку. Еще один важный способ задать язык – через использование порождающих грамматики. Грамматика состоит из множества лексических единиц разного типа и множества правил или продукции построения выражения. Грамматика имеет словарь  $V$ , есть множество лексических единиц для построения выражений языка. Некоторые лексические единицы словаря (терминальные) не могут заменяться другими лексическими единицами. Текст реализует структурно представленную деятельность, предполагает субъект и объект, процесс, цель, средства и результат, которые отражаются в содержательно-структурных, функциональных, коммуникативных показателях. Единицами внутренней организации структуры текста является алфавит, лексика (парадигматика), грамматика (синтагматика), парадигмы, парадигматические отношения, синтагматические отношения, правила идентификации, высказывания, между фразовой единство и фрагменты-блоки. На композиционном уровне выделяют предложения, абзацы, параграфы, разделы, главы, во главу, страницы и т.д., которые, кроме предложения, косвенно связанные с внутренней структурой, поэтому не рассматриваются. С помощью базы данных (базы терминов / морфем и служебных частей речи) и определенных правил анализа текста выполняют поиск слова. Синтаксические анализаторы работают в два этапа: идентифицируют содержательные лексемы и создают дерево разбора.

**Ключевые слова:** текст, украиноязычный, алгоритм, контент-мониторинг, ключевые слова, лингвистический анализ, синтаксический анализ, порождающих грамматики, структурная схема предложения, информационная лингвистическая система.

Lytvyn V. V.<sup>1</sup>, Bobyk I. O.<sup>2</sup>, Vysotska V. A.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Dr. Sc., Professor, Head of Information Systems and Networks Department, Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine

<sup>2</sup>PhD, Associate Professor of Higher Mathematics Department, Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine

<sup>3</sup>PhD, Associate Professor of Information Systems and Networks Department, Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine

#### APPLICATION OF ALGORITHMIC ALGEBRA SYSTEM FOR GRAMMATICAL ANALYSIS OF SYMBOLIC COMPUTATION EXPRESSIONS OF PROPOSITIONAL LOGIC

The architecture and implemented a software system parsing schemes of algebraic algebra and their interpretation. The software system allows to generate automated in such schemes create a program and debug the relevant schemes. A clear division of algebraic algebra into separate modules is defined, each of which will be characterized by its functional load. The methods of parsing for the development and presentation of grammar such schemes are used. Automatic transforming it in a list form is implemented. A machine system of algebraic algebra as an abstract interpretation of the mechanism of grammar parser is defined. The vocabulary  $V$  consists of finite not empty set of lexical units. The expression on  $V$  is a finite-length string of lexical units with  $V$ . An empty string does not contain lexical items and is denoted by  $\Lambda$ . The set of all lexical units over  $V$  is denoted as  $V'$ . The language over  $V$  is a subset  $V'$ . The language displayed through the set of all lexical units of language or through definition criteria, which should satisfy lexical items that belong to the language. Another is one important method to set the language through the use of generative grammar. The grammar consists of a lexical units set of various types and the rules or productions set of expression constructing. Grammar has a vocabulary  $V$ , which is the set of lexical units for language expressions building. Some of lexical units of vocabulary (terminal) can not be replaced by other lexical units. The text realizes structural submitted activities through provides subject, object, process, purpose, means and results that appear in content, structural, functional and communicative criteria and parameters. The units of internal organization of the text structure are alphabet, vocabulary (paradigmatics), grammar (syntagmatic) paradigm, paradigmatic relations, syntagmatic relation, identification rules, expressions, unity between phrasal, fragments and blocks. On the compositional level are isolated sentences, paragraphs, sections, chapters, under the chapter, page etc. that (except the sentence) indirectly related to the internal structure because are not considered. With the help of a database (database for terms/morphemes and structural parts of speech) and defined rules of text analysis searching terms. Parsers operate in two stages: lexemes content identifying and a parsing tree creates.

**Keywords:** text, a Ukrainian, algorithm, content monitoring, keywords, linguistic analysis, parsing, generative grammar, structured scheme sentences, information linguistic system.

#### REFERENCES

1. Glushkov V., Tseitlin G., Yushchenko E. Methods symbolic multiprocessing. Kiev, Science, Dumka, 1980, 252 p.
2. Glushkov V., Tseitlin G., Yushchenko E. Algebra. Languages. Programming. Kiev, Science, Dumka, 1989, 376 p.
3. Tseitlin G. Introduction to Algorithms. Kiev, Spotlight, 1999, 310 p.
4. Tseitlin G. Glushkov Algebra and theory of clones, *Cybernetics and Systems Analysis*, 2003, No. 4, pp. 48–58.
5. Tseitlin G. Structured programming tasks symbolic multiprocessing, *Cybernetics*, 1983, No. 5. pp. 22–30.
6. Tseitlin G. Parallelization algorithms for sorting, *Cybernetics*, 1989, No. 6, pp. 67–74.
7. Tseitlin G. Design sequential algorithms sorting, *Programming*, 1989, No. 3, pp. 3–21.
8. Yushchenko E., Tseitlin G., Gritsay V., Terzian T. Multilevel structural design program: Theoretical Foundations, tools. Moscow, Finances and Statistics, 1989, 208 p.
9. Kaluzhnin L. On algorithmization mathematical problems, *Probl. Cybernetics*, 1959, Issue 2, pp. 51–69.
10. Martyniuk T., Homyuk B. Metodi that zasobi parallel peretvoren vector masiviv danih. Vinnitsa UNIVERSUM-Vinnitsa, 2005, 203 p.
11. Doroshenko A., Iovcev O. A method of designing an abstract data type in the algebra of algorithmics, *Problems programuvannya*, 2012, No. 1, pp. 3–16.
12. Akulovsky V. Some aspects of formalizing the architectural design phase algorithms, *Problems programuvannya*, 2009, No. 2, pp. 3–11.
13. Andon F., Doroshenko A., Tseitlin G., Yatsenko E. Algebroalgoritmicheskie models and methods of parallel programming. Kiev, Academperiodika, 2007, 634 p.
14. Iovcev V., Mohnitsa A. S. Tools algorithmic algebra platform WEB 2.0, *Problems programuvannya*, 2010, No. 2–3, pp. 547–556.

УДК: 617.55-072.1+615.471.03:616.072.1

Ляшенко А. В.<sup>1</sup>, Баязітов М. Р.<sup>2</sup>, Годлевський Л. С.<sup>3</sup>, Баязітов Д. М.<sup>4</sup>, Бузиновський А. Б.<sup>5</sup><sup>1</sup>Асистент кафедри біофізики, інформатики та медичної апаратури<sup>2</sup>Д-р мед. наук, професор, професор кафедри хірургії № 1, Одеський національний медичний університет, Одеса, Україна<sup>3</sup>Д-р мед. наук, професор, завідувач кафедри біофізики, інформатики та медичної апаратури, Одеський національний

медичний університет, Одеса, Україна

<sup>4</sup>Аспірант кафедри хірургії №1, Одеський національний медичний університет, Одеса, Україна<sup>5</sup>Лікар-хіуррг ендоскопіст відділення малоінвазивної хірургії, КУ «Одеська обласна клінічна лікарня», Одеса, Україна

## ІНФОРМАЦІЙНО-ТЕХНІЧНА СИСТЕМА АВТОМАТИЗОВАНОЇ ЛАПАРОСКОПІЧНОЇ ДІАГНОСТИКИ

Вирішено завдання автоматизованого розпізнавання – діагностики циротичних змін та метастатичного ураження печінки за результатами аналізу лапароскопічних зображень. Об'єктом дослідження був процес побудови діагностичної системи автоматизованого розпізнавання лапароскопічних зображень. Предметом дослідження складали методи формування вихідних вибірок зображень для навчання каскадного класифікатора за ознаками Хаара. Метою роботи було створення інформаційної технології підтримки прийняття рішень при лапароскопічній діагностиці стану поверхні печінки на основі каскаду Хаара. Класифікацію зображень здійснювали з використанням методу каскадного класифікатора. При використанні для навчання 1000 зображень позитивного характеру та 500 негативних зображень показник чутливості діагностики цирозу печінки розробленої технології складав 68,8% і перевищував таку, яка мала місце при експертній діагностиці (31,0%) ( $P<0,01$ ). При метастатичному ураженні достовірні відмінності зазначеного показника складали 80,0% та 46,7% відповідно ( $P<0,02$ ). Крім того, при метастатичному ураженні достовірно підвищувалась специфічність діагностики – з 52,5% при експертній діагностиці до 85,0% ( $P<0,01$ ), а також спостерігалось зростання прогностичних показників – як позитивного (з 42,4% до 80,0%,  $P<0,01$ ), так і негативного (з 56,8% до 87,2%,  $P<0,01$ ). Згідно показникам тестування, показник AUC ROC для каскадного класифікатора склав 0,891, в той час як для експертної оцінки дорівнював 0,723, що свідчить про більшу ефективність застосування каскадного класифікатора. Розроблена технологія може бути рекомендована в клінічній практиці при виконанні лапароскопічних хірургічних втручань.

**Ключові слова:** автоматизоване розпізнавання зображень, лапароскопічне відео зображення, ознаки Хаара.

### НОМЕНКЛАТУРА

КАД – комп’ютерна автоматизована діагностика;  
 RGB – адитивна колірна модель (червоний, зелений, синій);  
*CIELAB* – система заданих кольорів;  
*PAL* – система аналогового кольорового телебачення;  
*HD* – відео з високою роздільністю;  
*.avi* – мультимедійний контейнер для аудіо-відео даних;  
 $i(x)$  – елемент матриці  $x$ ;  
 $i(y)$  – елемент матриці  $y$ ;  
 $i(x')$  – значення пікселя в точці  $x$  початкового зображення;  
 $i(y')$  – значення пікселя в точці  $y$  початкового зображення;  
 $s$  – сума рядків матриці  $(x, y)$ ;  
 $X$  – область зображення для розрахунку ознак;  
 $f$  – набір ознак в навчальній вибірці;  
 $D$  – множина допустимих значень ознак  $f$ ;  
 $m$  – кількість негативних зображень;  
 $l$  – кількість позитивних зображень;  
 $w$  – розподіл ймовірностей виявлення;  
 $e$  – помилка виявлення;  
 $h$  – каскадний класифікатор множини  $x$ ;  
 $T$  – множина кількісних ознак;  
 $t$  – значення вихідного параметру спостереження;  
*OpenCV* – бібліотека алгоритмів комп’ютерного зору;  
*.xml* – текстовий файл, де відбувається розмічування даних;  
 ІП – істинно-позитивні;  
 ХН – хибно-негативні;  
 ІН – істинно негативні;

ХП – хибно-позитивні діагнози;

ППП – позитивний прогностичний показник;

НПП – негативний прогностичний показник;

*AUC* – площа під кривою до діагональної лінії графіку;*ROC* – графік, що дозволяє оцінити якість класифікації.

### ВСТУП

При автоматизації діагностики за ознаками лапароскопічних зображень застосовують інформаційні системи, які дозволяють провести оцінку окремих ділянок зображень, що викликають підозру наявності патологічних змін за певними ознаками, а саме: колір, контур/ форми, а також характеристики текстури [1–3].

При розробці інформаційної технології автоматизованому аналізі відео-лапароскопічних зображень, отриманих при дослідженні органів черевної порожнини, наявними є певні особливості, які необхідно приймати до уваги [4, 5]. Так, автори зазначають, що як наслідок значного зашумлення та недостатнього освітлення, відмінності елементів зображення відносно кольору є незначними, в той час як відмінності форми об’єктів є високоваріабельними, що значно ускладнює їх використання з метою автоматизованої діагностики [4]. Додатковою особливістю є те, що переважна більшість пікселів при огляді черевної порожнини, фарбовані відтінками червоного кольору, тому ознаки кольору, як такі є малоінформативними.

До факторів, які суттєвим чином можуть впливати на результати подібних досліджень, слід віднести також швидкість зміни ракурсу та освітлення об’єктів, спотворення інформації за рахунок відбиття проміння від поверхні [5, 6]. Нарешті важливим є факт того, що сприйняття характеристик зображень людським оком суттєво відрізняється

ся від інформації, яку реєструє цифрова відеокамера, так як на рівні кодування кольору відеокамерою не реалізується закон Вебера-Фехнера [7, 8]. Через подібні відмінності є необхідним застосування зокрема гама-корекції до первинної інформації, яка дозволяє визначити співвідношення між чисельним значенням пікселя та його дійсним значенням освітлення [4]. Після цієї процедури подальше застосування логарифмічної шкали не спотворює суб'єктивну кольорову палітру людського ока.

Об'єктом дослідження є процес побудови діагностичної системи автоматизованого розпізнавання лапароскопічних зображень.

Зважаючи на здатність методу ознак Хаара ефективно здійснювати розпізнавання зображень під різними кутами та на різній відстані, його було застосовано для створення системи автоматизованої діагностики.

Предметом дослідження були методи формування вихідних вибірок зображень для навчання каскадного класифікатора за ознаками Хаара.

**Метою** дійсного дослідження було створення інформаційної технології підтримки прийняття рішень при лапароскопічній діагностиці стану поверхні печінки на основі каскаду Хаара.

## 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Процедура виявлення патології, на основі класифікації зображень полягала в розрахунку простих функцій на основі ознак Хаара [9]. Ознаки Хаара являють собою набір прямокутників, між якими проводиться розрахунок насищенності пікселів. Наприклад, для функції ознак з двома прямокутниками приймається до уваги різниця між сумою пікселів в межах двох областей. Функція ознак щодо трьох прямокутників обчислюється, як різниця центральної області від суми двох зовнішніх областей. Нарешті функція для чотирьох прямокутників обчислює різницю між діагональними областями [9]. Слід зазначити, що розмір прямокутників складає 24x24 пікселя (рис. 1).

Функції прямокутників обчислюються як інтегральне зображення. Для інтегрального зображення формується матриця, де в її елементах ( $ii(x,y)$ ) міститься інформація про суму пікселів сусідніх елементів (1):

$$ii(x,y) = \sum_{x' \leq x, y' \leq y} i(x',y'). \quad (1)$$



a

роботі також використовується наступна пара повторень (2):

$$\begin{aligned} s(x,y) &= s(x,y-1) + i(x,y) \\ ii(x,y) &= ii(x-1,y) + s(x,y), \end{aligned} \quad (2)$$

де  $s(x,y-1)=0$  та  $ii(x-1,y)=0$  – інтегральне зображення, яке обчислюється від вхідного зображення.

Згідно [4] особливості ознак Хаара можуть представляти детальній аналіз контуру, текстури, а також виявлення патології згідно горизонтальної та вертикальної орієнтації лапароскопічної камери.

Ознаки області зображення для множини допустимих значень розраховується співвідношенням (3):

$$f : X \Rightarrow D_f. \quad (3)$$

Навчання каскадного класифікатора. З огляду на набір позитивних та негативних зображень використання каскадного класифікатору, має переваги в швидкості розпізнавання та його якості.

Алгоритм навчання полягає в розрахунку оптимальної порогової функції класифікатора з набору ознак, які з початку обчислюються з набору позитивних зображень (наявність патології), де заздалегідь виділено область захвату зображення на зображені. Розрахунок ознак і набір примітивів зберігається в базі даних (рис. 2).

Алгоритм роботи каскадного класифікатора складається з наступних кроків:

1. Отримуємо приклади зображення  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , де  $y_i = 0,1$  – позитивні приклади з наявністю патології та негативні приклади, де патологія відсутня.

2. Проводимо визначення параметрів ознак:

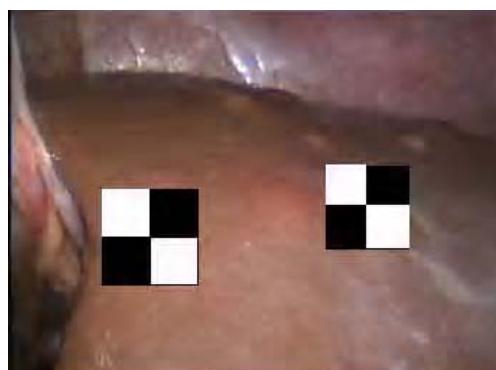
$$w_{l,i} = \frac{1}{2m}, \frac{1}{2l},$$

для  $y_i = 0,1$  відповідно.

Проводимо нормалізацію параметрів ознак (4):

$$w_{t,i} = \frac{w_{l,i}}{\sum_{j=1}^n w_{t,j}}, \quad (4)$$

де  $w_t$  – розподіл ймовірностей виявлення.



б

Рисунок 1 – Зображення патології печінки у вигляді метастатичних уражень:

а – вхідне лапароскопічне зображення метастатичних уражень печінки; б – використання прямокутних ознак Хаара для виявлення на лапароскопічному зображені метастатичного ураження печінки



Рисунок 2 – Схема роботи каскадного класифікатору

3. Для кожної функції  $j$ , проводять навчання класифікатору ( $h_j$ ), який обмежений використанням наступних функцій виявлення ознак. Це дає змогу визначити помилку ( $e_j$ ), а саме відношення ознак до розподілу ймовірностей яке оцінюється, як (5) :

$$e_j = \sum_i w_i |h_j(x_i) - y_i|. \quad (5)$$

4. Вибираємо каскад класифікатору  $h_t$  з найменшою помилкою  $e_t$ .

5. Проводиться оновлення визначених ознак на зображенні (6):

$$w_{t+1,i} = w_{t,i}\beta_t^{1-e_t}, \quad (6)$$

де  $e_t = 0$ , якщо наприклад  $x_t$  класифікується, як правильно виявлений елемент, і якщо  $e_t = 1$  як «інакше»  $\beta_t = \frac{e_t}{1-e_t}$  – виявлення з помилкою.

6. Формується остаточний каскадний класифікатор (7):

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \sum_{t=1}^T \alpha_t h_t(x) \geq \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \alpha_t; \\ 0, & \text{інакше,} \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{де } \alpha_t = \log \frac{1}{\beta_t}.$$

Таким чином, побудований каскад має – 38 ступенів та 6000 особливих ознак. Після проведення навчання класифікатора обов’язковим було його тестування [1], яке полягало в визначенні ефективності розпізнавання норми та патологічних змін, а також характеру патологічних особливостей – відмінності цирозу від метастатичного ураження печінки.

## 2 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Зважаючи на складність передачі кольору, як інформативної ознаки, яка має діагностичне значення, універсальним методом автоматизованого аналізу зображень – порівняння їх до відповідної норми, є використання бінарних зображень [1, 4, 10]. Так, для норми гістероско-пічних зображень характерним є більш висока медіана сірого кольору, а також більша гомогенність та менша кон-

трастність у порівнянні до ендометрію з патологічними змінами [4]. Подібний факт вказує на ефективність дослідження текстури зображення, як інформаційного діагностичного критерію, що було підтверджено при КАД злойкісних пухлин урази [2, 4, 11]. Загальна схема КАД базувалась на реалізації алгоритму, який передбачав захоплення відео- зображення, гама-корекцію, багато масштабний аналіз текстури зображення, екстракцію характерних ознак з наступною селекцією та на завершально-му етапі – класифікацію зображень [1, 4, 11]. Причому, класифікація зображень відбувалась за використання бази даних відповідних зображень та технологій навчання класифікатора за каскадними ознаками.

Однак, на сьогодні немає чітких рекомендацій щодо протоколу інформаційних методів виявлення патології на лапароскопічних зображеннях. Тому, слід випробувати методи, які довели свою ефективність в інших наукових галузях. Одним з таких методів є визначення ефективності вейвлетів Хаара для швидкого розпізнавання образів [6, 10, 12]. Разом з тим, при ендоскопічній автоматизованій діагностиці поліпізного ураження кишковика за допомогою ендокапсул в дослідженні [1] було застосовано три різні підходи. Так, за цих умов автори поставили під сумнів ефективність застосування ознак Хаара та гістограми направлених градієнтів, що пояснюється надмірно високою вихідною різноманітністю орієнтацій патологічних утворень. Однак, використання комбінованого підсиленого класифікатора дозволило підвищити ефективність розпізнавання, яка при аналізі 20 відео-, отриманих із бази даних зображень поліпів клініки Мейо склали 93,9%. Ці результати вказують про можливість збільшення ефективності розпізнавання на основі ознак Хаара при попередньому визначенні зони підозрюваної на наявність патологічних змін.

## 3 МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ

При проведенні дослідження дотримувались певних правил збору та аналізу відеоінформації, яка включала наступну послідовність дій:

- 1) калібрування цифрової камери, яка обов’язково включала баланс білого, а також конвертування кольорової палітри в цифровий код, що здійснювалась за інструкцією виробника;

2) отримання відеоінформації здійснювали при певних стандартних урахувань, а саме:

– камера повинна бути розташована фронтально до поверхні печінки по відношенню до відеокамери;

– кут огляду камери, має бути  $15 \pm 5$  градусів [9]. За цих умов відстань до поверхні складала від 3 до 5 см;

3) отримання на зображеннях в режимі формування бази позитивних та негативних зображень виділених зон, які з точки зору діагностики були інформативними;

4) здійснення гама-корекцію щодо виділеної зони;

6) проведення необхідних операцій щодо аналізу кольору, текстури та контуру;

7) проведення конверсії зображення з RGB режиму в режим CIELAB;

8) застосування ознак Хаара, для навчання каскадного класифікатора;

9) зберігання результатів класифікації в базі даних для подальшого розгляду відповідно показникам експертного аналізу. Генерування відповідних висновків.

До навчання за ознаками Хаара було залучено 32 відеозображення пацієнтів з цирозом печінки, а також 30 відеозображень печінки у пацієнтів із метастазами. Середній вік пацієнтів складав відповідно  $46,5 \pm 3,3$  та  $49,3 \pm 4,5$  років. Крім того, для навчання норми було використано 40 лапароскопічних відеозображень поверхні печінки, отриманих у практично здорових осіб середнім віком  $46,3 \pm 2,7$  років.

Всі відео було отримано за допомогою відео обладнання, а саме – лапароскопічної камери з апертурою оптики 5 мм Carl Storz Tricam Camera (Carl Storz, Німеччина) в період з 2011 по 2016 рр. Камера мала аналоговий вихід (PAL 475 горизонтальних ліній), який під'єднувався до плати захоплення averMedia HD capture Studio 203 (Avermedia,

China). В результаті відеосигнал проходив цифрування з щільністю пікселів 1024 x 768 в форматі .avi.

Критеріями включення відео- до навчання були: зафіксоване калібрування цифрової камери за параметрами передбаченими виробником, середня тяжкість стану пацієнтів та підтвердження відповідних діагнозів за результатами клінічних та лабораторно-інструментальних методів дослідження.

Ефективність розробленої технології автоматизованої діагностики стану печінки оцінювали за випадками підтверджених діагнозів. Всього при проведенні подібної оцінки було використано 32 зображень циротичних змін печінки та 30 зображень метастатичного її ураження. Крім того, в якості контроля спостерігали 79 пацієнтів, у яких лапароскопічна діагностика проводилась не з причин захворювання печінки, але у яких було отримано відео-знімки її поверхні.

На основі отриманих показників розраховували чутливість та специфічність діагностичної процедури:

Чутливість розраховували як  $\text{ПП}/(\text{ПП}+\text{ХН}) \times 100\%$ ; специфічність –  $\text{ІН}/(\text{ІН}+\text{ХП}) \times 100\%$ .

Крім того, розраховували показник НПП:  $\text{ПП}/(\text{ПП}+\text{ХП}) \times 100\%$  та показник НІН –  $\text{ІН}/(\text{ІН}+\text{ХН}) \times 100\%$ .

Результати експертної оцінки, яку проводили хірурги з досвідом виконання лапароскопічних втручань не менше від 10 років, та розробленої технології автоматизованої діагностики порівнювали з використанням критерію «z» порівняння двох пропорцій та програми «Primer Biostatistics» (США).

#### 4 ЕКСПЕРИМЕНТИ

Для тестування методу виявлення патології печінки на лапароскопічних зображеннях застосовували програмне забезпечення з графічним інтерфейсом (рис. 3). Про-

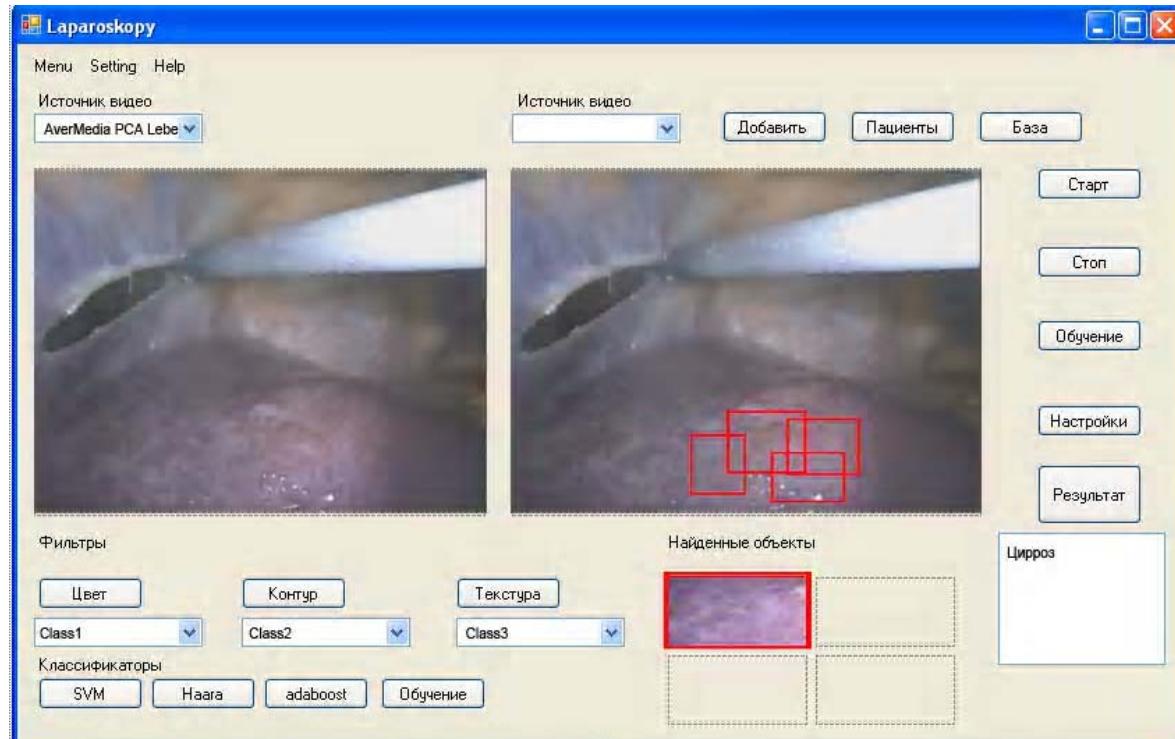


Рисунок 3 – Інтерфейс програмного забезпечення автоматизованої лапароскопічної діагностики патологічних змін поверхні печінки на предмет цирозу змін

ограмне забезпечення реалізоване на мові програмування C++, з використанням бібліотеки OpenCV.

Спочатку виконували навчання класифікатора згідно двох прикладів (позитивні та негативні зображення), за допомогою підпрограми OpenCV [4] – Open\_traincascade.exe (рис. 4).

Збережені дані ознак Хаара зберігали в .xml файлі, які вміщували показники виявленої патології поверхні печінки.

Інтерфейс програми дозволяє:

- захоплювати лапароскопічне відеозображення;
- завантажувати архівні відеозображення з бази даних;
- виконувати калібрування камери та монітору;
- виконувати функцію обробки зображення для створення бази негативних та позитивних зображень;
- проводити тестування класифікаторів на предмет виявленіх та невиявленіх патологій.
- робити вибір поміж методів виявлення патології на інших органах черевної порожнини.

Слід зазначити, що інтерфейс програмного забезпечення побудований для розуміння технічно непідготовленим лікарям-хірургам.

## 5 РЕЗУЛЬТАТИ

Результати апробації розробленого методу засвідчили, що за показником чутливості діагностики цирозу пе-

чинки розроблена технологія складала 68,8% і перевищувала таку, яка мала місце при експертній діагностиці (31,0%) ( $P<0,01$ ) (табл. 1). При метастатичному ураженні також спостерігались достовірні відмінності зазначеного показника – 80,0% та 46,7% відповідно ( $P<0,02$ ). Крім того, при метастатичному ураженні достовірно підвищувалась специфічність діагностики – з 52,5% при експертній діагностиці до 85,0% ( $P<0,01$ ), а також спостерігалось зростання прогностичних показників – як позитивного (з 42,4% до 80,0%,  $P<0,01$ ), так і негативного (з 56,8% до 87,2%,  $P<0,01$ ).

Згідно показникам тестування, показник AUC ROC для каскадного класифікатору склав 0,891, в той час як для експертної групи дорівнював 0,723, що свідчить про більшу ефективність застосування каскадного класифікатора.

## 6 ОБГОВОРЕННЯ

Таким чином, отримані результати свідчать про вирішення важливої науково-технічної проблеми автоматизованої діагностики патологічних змін органів черевної порожнини за результатами аналізу лапароскопічних зображень. Важливо зазначити, що розроблена система дозволяє досягти більшої ефективності у порівнянні до експертної діагностики. Так побудована ROC – крива та наступне визначення площини під кривою – від кривої до діагональної лінії графіку (AUC) довела її більш високе значення при тестуванні розробленого каскадного класифікатора.

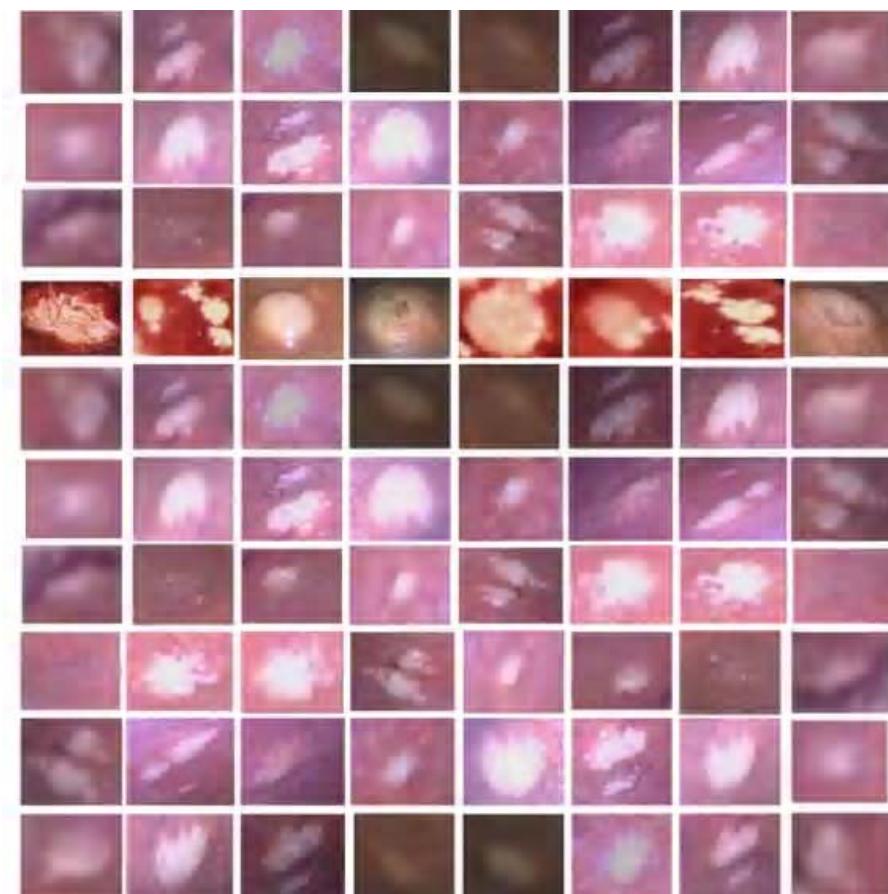


Рисунок 4 – Загальний вигляд зображень метастатичного ураження печінки, які було використано при навчанні системи автоматизованого розпізнавання зображень поверхні печінки

Таблиця 1 – Ефективність класифікації зображень за допомогою розробленої КАД (%)

	Чутливість	Сецифічність	Позитивний прогностичний показник	Негативний прогностичний показник
Експертна оцінка зображень				
Цироз	13/32 (31,0)	26/39 (66,7)	50,0	57,8
Метастатичне ураження	14/30 (46,7)	21/40 (52,5)	42,4	56,8
Розроблена автоматизирована діагностика				
Цироз	22/32 (68,8) ##	32/39 (82,0)	73,9	76,2
Метастатичне ураження	24/30 (80,0) #	34/40 (85,0) ##	80,0 ##	87,2 ##

П р и м і т к а: #— $P<0,05$  та ##— $P<0,01$  у порівнянні до відповідного показника в групі з експертною діагностикою. Використано критерій « $\chi^2$ » порівняння двох пропорцій

Розроблена система є новою відповідно до принципів її устрою, застосування ознак Хаара та алгоритмів аналізу відповідних зображень, так як на сьогодні подібні проблеми фрагментарно представлені в науковій літературі [2, 3, 5, 6, 9, 11]. Слід підкреслити, що, зважаючи на особливості кольору лапароскопічних зображень, в дослідженні визначено ефективність використання інтенсивності в шкалі сірого, що відповідає практиці автоматизованого розпізнавання зображень за даними інших авторів [1, 4, 7, 8].

Розроблена технологія в подальшому може бути удосконалена – як за рахунок збільшення вибірки відео зображень, які було використано для навчання, так і шляхом розширення спектру захворювань органів черевної порожнини, які можливо діагностувати на основі розробленої КАД. В цілому застосування розробленої системи дозволить підвищити ефективність діагностики в лапароскопічній хірургії, зменшивши ризик виникнення небажаних результатів при хірургічних втручаннях.

## ВИСНОВКИ

Отримані результати свідчать про ефективність застосування КАД на основі ознак Хаара за допомогою каскадного класифікатору при автоматизованій діагностиці стану печінки при цирозі та метастатичному ураженні.

Принципи устрою та функціонуванні розробленої КАД можуть мати універсальне значення при автоматизованій лапароскопічній діагностиці як стану печінки, так і інших органів черевної порожнини.

Створення відео-банку лапароскопічних зображень відповідно до вимог їх застосування в навчанні розробленої КАД є перспективним для подальшого підвищення ефективності автоматизованої лапароскопічної діагностики.

## ПОДЯКИ

Роботу виконано в рамках держбюджетної науково-дослідної теми Одеського національного медичного університету «Аналіз, розробка і впровадження комплексних інформаційних систем в діяльність установ охорони здоров'я» (номер державної реєстрації 0112U008306).

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Albisser Z. Computer-aided screening of capsule endoscopy videos / Z. Albisser // Master's Thesis, University of Oslo. – 2015. – № 1. – P. 74–245.
2. Segmentation of uterus using laparoscopic ultrasound by an image-based active contour approach for guiding gynecological diagnosis

3. Shu Y. Segmentation of laparoscopic images: Integrating graph-based segmentation and multistage region merging/ Y. Shu, G. A. Bilodeau, F. Cheriet // *The 2nd Canadian Conference on Computer and Robot Vision (CRV'05)*, May 09 – 11, 2005 : Proceeding. IEEE Computer Society Washington, 2005. – P. 429–436. DOI: 10.1109/CRV.2005.74
4. Computer-aided diagnosis in hysteroscopic imaging / [M. S. Neofytou, V. Tanos, I. Constantinou et al.] // IEEE Journal of Biomed. Health Inform. – 2015. – Vol. 19(3). – P. 1129–1136. DOI: 10.1109/JBHI.2014.2332760.
5. Marcinczak J. M. Closed contour specular reflection segmentation in laparoscopic images / J. M. Marcinczak, R. R. Grigat // *J. of Biomed. Imaging*. – 2013. – Vol. 2013, Jan. 2013, Article No 18; DOI: 1155/2013/593183
6. Boisvert J. Segmentation of laparoscopic images for computer assisted surgery / J. Boisvert, F. Cheriet, G. Grimard // *13th Scandinavian Conference Image Analysis*, June 29 – July 2, 2003, Halmstad, Sweden : Proceedings. Lecture Notes in Computer Sciences, 2003. – Vol. 2749. – P. 587–594.
7. Application of mobile photography with smartphone cameras for monitoring of orthodontic correction with dental brackets/ [L. S. Godlevsky, E. A. Bidnyuk, N. R. Bayazitov et al.] // *Chinese Journal of Modern Medicine*. – 2014. – No. 15. – P. 10–14.
8. Application of mobile photography with smartphone cameras for monitoring of early caries appearance in the course of orthodontic correction with dental brackets/ [L. S. Godlevsky, E. A. Bidnyuk, N. R. Bayazitov et al.] // *Applied Med. Informatics*. – 2013. – Vol. 33, No. 4. – P. 21–26.
9. Diagnostic laparoscopy in the era of modern imaging – retrospective analysis from a single center / D. Amarapurkar, N. Bhatt, N. Patel et al. // *Indian Journal of Gastroenterology*. – 2013. – Vol. 32, No. 5. – P. 302–306.
10. Polyp detection and radius measurement in small intestine using video capsule endoscopy/ [M. Zhou, G. Bao, Y. Geng et al.] // *7th International Conference on Biomedical Engineering and Informatics (BMEI)* IEEE, 7th Oct. 2014. – P. 237–241.
11. Tissue classification for laparoscopic image understanding based on multispectral texture analysis / [Y. Zhang, S. J. Wirkett, J. Iszatt et al.] // *Medical Imaging 2016: Image-Guided Procedures, Robotic Interventions, and Modeling*. – March 18, 2016 : SPIE Proceedings. – 2016. – Vol. 9786; DOI:10.1117/12.2216090
12. Lux M. Annotation of endoscopic videos on mobile devices: A bottom-up approach / M. Lux, M. Riegler // In: *Proceedings of the 4th ACM Multimedia Systems Conference, MMSys '13*, New York, USA. – 2013. – P. 141–145.

Стаття надійшла до редакції 02.11.2016.

Після доробки 05.12.2016.

Ляшенко А. В.<sup>1</sup>, Баязитов Н. Р.<sup>2</sup>, Годлевский Л. С.<sup>3</sup>, Баязитов Д. Н.<sup>4</sup>, Бузиновский А. Б.<sup>5</sup>

<sup>1</sup>Асистент кафедры биофизики, информатики и медицинской аппаратуры, Одесский национальный медицинский университет, Одесса, Украина

<sup>2</sup>Д-р мед. наук, проф., профессор кафедры хирургии № 1, Одесский национальный медицинский университет, Одесса, Украина

<sup>3</sup>Д-р мед. наук, проф., заведующий кафедры биофизики, информатики и медицинской аппаратуры, Одесский национальный медицинский университет, Одесса, Украина

<sup>4</sup>Аспирант кафедры хирургии №1, Одесский национальный медицинский университет, Одесса, Украина

<sup>5</sup>Врач-хирург малоинвазивного отделения КП «Одесская областная клиническая больница», Одесса, Украина

## ІНФОРМАЦІОННО-ТЕХНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ ЛАПАРОСКОПІЧЕСКОЇ ДІАГНОСТИКИ

Решена задача автоматизированного распознавания – диагностики цирротических изменений и метастатического поражения печени по результатам анализа лапароскопических изображений. Объектом исследования был процесс построения диагностической системы автоматизированного распознавания лапароскопических изображений. Предметом исследования были методы формирования исходных выборок изображений для обучения каскадного классификатора. Целью исследования было создание информационной технологии поддержки принятия решений при лапароскопической диагностике состояния поверхности печени на основе каскада Хаара. Классификацию изображений осуществляли с применением метода каскадного классификатора. При применении для обучения 1000 изображений позитивного характера и 500 негативных изображений показатель чувствительности диагностики цирроза печени с помощью разработанной технологии составил 68,8% и превышал таковой, который регистрировался при экспертной диагностике (31,0%) ( $P<0,01$ ). При метастатическом поражении достоверные отличия указанного показателя составили 80,0% и 46,7% соответственно ( $P<0,02$ ). Кроме того, при метастатическом поражении достоверно возрастала специфичность диагностики – с 52,5% при экспертной диагностике до 85,0% ( $P<0,01$ ), а также отмечалось увеличение прогностических показателей – как позитивного (с 42,4% до 80,0%,  $P<0,01$ ), так и негативного (с 56,8% до 87,2%,  $P<0,01$ ). В соответствии с результатами тестирования, показатель AUC ROC для каскадного классификатора составил 0,891, в то время как для экспертной оценки – 0,723, что свидетельствует о большей эффективности каскадного классификатора. Разработанная технология может быть рекомендована для применения в клинической практике при выполнении лапароскопических хирургических вмешательств.

**Ключевые слова:** автоматизированное распознавание изображений, лапароскопические видеозображения, признаки Хаара.

Lyashenko A. V.<sup>1</sup>, Bayazitov N. R.<sup>2</sup>, Godlevsky L. S.<sup>3</sup>, Bayazitov D. N.<sup>4</sup>, Buzynovskiy A. V.<sup>5</sup>

<sup>1</sup>Assistant of the Department of Biophysics, Informatics and medical equipment, Odessa National Medical University, Odessa, Ukraine

<sup>2</sup>Dr. Sc. Professor of the Department of Surgery № 1, Odessa National Medical University, Odessa, Ukraine

<sup>3</sup>Dr. Sc. Professor Chief of the Department of Biophysics, Medical Informatics and Medical Devices, Odessa National Medical University, Odessa, Ukraine

<sup>4</sup>Postgraduate Department of Surgery №1, Odessa National Medical University, Odessa, Ukraine

<sup>5</sup>Doctor-surgeon of Endoscopy, Department Odessa Regional Hospital, Odessa, Ukraine

## INFORMATIONAL-TECHNICAL SYSTEM FOR THE AUTOMATED LAPAROSCOPIC DIAGNOSTICS

The problem of automatic recognition – diagnostics of cirrhotic and metastatic liver damage has been solved on the basis of laparoscopic images analysis. The object of the investigation was confined to the process of diagnostic automatic system of laparoscopic images recognition building up. The subject of investigation was confined to composing of training images for the learning of cascade Haar's classificatory. The establishing of the system of decision support for laparoscopic surgeons was the aim of the investigation. The automatic diagnostic technology was developed on the basis of Haar's features usage. The classification of images was performed using cascade classifier exploration, and 1000 positive images along with 500 negative ones have been used for the learning . It was established that the sensitivity of cirrhosis of the liver diagnostics was 68,8% and exceeded that one which was determined after expert analysis (31,0%) ( $P<0,01$ ). The sensitivity of metastatic damage was 80,0% and 46,7% after developed and expert diagnostics were performed correspondently ( $P<0,02$ ). Besides, the specificity was also elevated – from 52,5% after expert diagnostics up to 85,0% ( $P<0,01$ ) after developed method. The net increasing of both positive prognostic index (from 42,4% up to 80,0%,  $P<0,01$ ), as well as negative one (from 56,8% up to 87,2%,  $P<0,01$ ) was also observed. In accordance to results of tests, the AUC ROC for cascade classifier was 0,891, while such one for expert analysis was 0,723. That is in favor for higher effectiveness of cascade classifier. The worked out technology is recommended for laparoscopic surgery clinical exploration.

**Keywords:** automatic recognition of images, laparoscopic video-images, Haara features.

## REFERENCES

- Albisser Z. Computer-aided screening of capsule endoscopy videos, *Master's Thesis, University of Oslo*, 2015, No. 1, pp. 74–245.
- Gong X-H., Lu J., Liu J. et al. Segmentation of uterus using laparoscopic ultrasound by an image-based active contour approach for guiding gynecological diagnosis and surgery, *PLoS ONE*, 2015, Vol. 10(10): e0141046. DOI:10.1371/journal.pone.0141046
- Shu Y., Bilodeau G. A., Cheriet F. Segmentation of laparoscopic images: Integrating graph-based segmentation and multistage region merging, *The 2nd Canadian Conference on Computer and Robot Vision (CRV'05)*, May 09–11, 2005 : Proceeding. IEEE Computer Society Washington, 2005, pp. 429–436. DOI: 10.1109/CRV.2005.74
- Neofytou M. S., Tanos V., Constantinou I. et al. Computer-aided diagnosis in hysteroscopic imaging, *IEEE J. Biomed. Health Inform.*, 2015, Vol. 19(3), pp. 1129–1136. DOI: 10.1109/JBHI.2014.2332760.
- Marcinczak J. M., Grigat R. R. Closed contour specular reflection segmentation in laparoscopic images, *J. of Biomed. Imaging*, 2013, Vol. 2013, Jan. 2013, Article No. 18; DOI: 1155/2013/593183
- Boisvert J., Cheriet F., Grimard G. Segmentation of laparoscopic images for computer assisted surgery, *13 th Scandinavian Conference Image Analysis*, June 29 – July 2, 2003, Halmstad, Sweden: Proceedings. Lecture Notes in Computer Sciences, 2003, Vol. 2749, pp. 587–594.
- Godlevsky L. S., Bidnyuk E. A., Bayazitov N. R. et al. Application of mobile photography with smartphone cameras for monitoring of orthodontic correction with dental brackets, *Chinese Journal of Modern Medicine*, 2014, No. 15, pp. 10–14.
- Godlevsky L. S., Bidnyuk E. A., Bayazitov N. R. et al. Application of mobile photography with smartphone cameras for monitoring of early caries appearance in the course of orthodontic correction with dental brackets, *Applied Med. Informatics*, 2013, Vol. 33, No. 4, pp. 21–26.
- Amarapurkar D., Bhatt N., Patel N. et al. Diagnostic laparoscopy in the era of modern imaging – retrospective analysis from a single center, *Indian Journal of Gastroenterology*, 2013, Vol. 32, No. 5, pp. 302–306.
- Zhou M., Bao G., Geng Y. et al. Polyp detection and radius measurement in small intestine using video capsule endoscopy, *7th International Conference on Biomedical Engineering and Informatics (BMEI) IEEE*, 7th Oct. 2014, pp. 237–241.
- Zhang Y., Wirkett S. J., Iszatt J. et al. Tissue classification for laparoscopic image understanding based on multispectral texture analysis, *Medical Imaging 2016: Image-Guided Procedures, Robotic Interventions, and Modeling*. March 18, 2016, SPIE Proceedings, 2016, Vol. 9786; DOI: 10.1117/12.2216090
- Lux M., Riegler M. Annotation of endoscopic videos on mobile devices: A bottom-up approach, *In: Proceedings of the 4th ACM Multimedia Systems Conference, MMSys '13, New York, USA*, 2013, pp. 141–145.

УДК 621.39, 004.7

Шмелева Т. Р.

Канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры коммутационных систем Одесской национальной академии связи им. А. С. Попова, Одесса, Украина

## РЕЕНТЕРАБЕЛЬНАЯ МОДЕЛЬ RIP ПРОТОКОЛА В ФОРМЕ РАСКРАШЕННЫХ СЕТЕЙ ПЕТРИ

Решена задача автоматизации оценки функциональных характеристик IP-сетей с динамической маршрутизацией на основе протокола RIP в процессе проектирования сетей. Предложен метод построения реентерабельных моделей, который обеспечивает повторное использование моделей, ориентированных на технологии и инвариантных к структуре сети. Для проведения вычислительных экспериментов и получения числовых оценок параметров качества обслуживания IP-сети к моделям терминальных сетей добавлены измерительные фрагменты в параметрическом виде. Проведен сравнительный анализ параметров качества обслуживания IP-сетей при слабой и средней нагрузке в условиях нормального режима работы и при временном отключении портов маршрутизаторов. Получена оценка полезной пропускной способности сети при разных видах нагрузки и условиях функционирования сети. В результате проведенных экспериментов выявлено, что значения параметров качества обслуживания исследуемой сети существенно не изменяются при нормальном режиме работы и временном отключении портов маршрутизаторов, изменение значений дисперсии является индикатором проблем в сети. Автоматизация оценки характеристик способствует сокращению сроков проектирования сетей.

**Ключевые слова:** протокол динамической маршрутизации, протокол RIP, сеть IP, реентерабельная модель, раскрашенная сеть Петри, среднее время доставки пакета.

### НОМЕНКЛАТУРА

$\sigma$  – среднеквадратическое отклонение;  
*CPN* – Colored Petri Nets;  
*IP* – Internet Protocol;  
*ML* – Markup Language;  
*MTU* – Model Time Unit;  
*RIP* – Routing Information Protocol;  
*QoS* – Quality of Service;  
*Traf* – пропускная способность сети;  
*TrIN* – количество полученных пакетов;  
ВДП – время доставки пакета;  
ТС – терминальная сеть.

### ВВЕДЕНИЕ

Широкое распространение подходов управляемой моделью разработки дает ощущимые результаты лишь в случае адекватного выбора парадигмы моделирования. Стандарт языка UML, широко распространенного в разработке программного обеспечения продолжает вбирать в себя прогрессивные формализмы моделирования параллельных процессов. Так, например, диаграмма деятельности последнего стандарта языка UML включает элементы сетей Петри. Проектирование телекоммуникационных сетей требуют парадигм моделирования инвариантных к топологии (структурной схеме сети). Одной из таких парадигм является реентерабельная модель в форме раскрашенной сети Петри. Модель разрабатывается для определенной технологии, а параметры сети, такие как структурная схема, производительность оборудования и программного обеспечения загружаются в виде структур данных. Модель обеспечивает автоматизацию расчета функциональных характеристик сети непосредственно в процессе имитационного моделирования с помощью специальных измерительных фрагментов. Таким образом, скорость расчета с помощью имитационной модели приближается к скорости расчетов с помощью аналитических моделей, обеспечивая, как правило, большую точность оценок. Автоматизация расчета характеристик и повышение точ-

ности оценок способствуют сокращению сроков и повышению качества проектирования сетей.

В настоящей работе построена модель для IP-сети с динамической маршрутизацией на основе протокола RIP наиболее распространенной сетевой среды современных корпоративных сетей. Поскольку принципиальным для построения модели являются дистанционно-векторные процедуры RIP, модели могут быть модифицированы для использования других протоколов дистанционно-векторной маршрутизации, например BGP, являющимся основным протоколом взаимодействия автономных систем – ядра современного интернета.

### 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть рассматривается метод построения реентерабельных моделей в форме раскрашенных сетей Петри. Представлены основные свойства протокола динамической маршрутизации RIP и параметры IP-сети.

Тогда задача автоматизации оценки функциональных характеристик сетей с динамической маршрутизацией в процессе проектирования сетей будет заключаться в построении реентерабельных моделей сети, ТС, маршрутизаторов, компонентов, реализующих протокол динамической маршрутизации, инвариантных отношению к топологии сети, топология является параметром модели, реализации повторной входимости компонентов и переключения тегов в соответствии с топологией, что способствует сокращению сроков проектирования сетей.

Измерительные фрагменты позволяют провести оценку пропускной способности сети, средних и других статистических моментов при разных видах нагрузки и условиях функционирования сети для всех или для отдельной ТС непосредственно в процессе моделирования.

### 2 ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР

Основные принципы моделирования телекоммуникационных сетей раскрашенными сетями Петри и оценки функциональных характеристик сетей непосредственно в процессе имитационного моделирования с помощью измерительных фрагментов изучены в [4]. Однако в

[4] представлены лишь модели со статическими таблицами коммутации и маршрутизации. Моделирование дистанционно-векторных протоколов для сетей технологии Е6 изучены в [7]. Дистанционно-векторные протоколы маршрутизации применяются как на периферии, например RIP [1, 2], так и в магистрали (ядре Интернет), например, BGP. Поэтому оценка характеристик сетей IP-RIP является актуальной [5], поскольку указанное сочетание протоколов является характерным для большинства корпоративных сетей в современном мире. Таким образом, задача проектирования IP-RIP сетей является широко распространенной.

Представленные в монографии [4] простые принципы построения моделей на основе прямого отображения структурной схемы сети вполне подходят для выполнения одноразовых работ по моделированию. Для масштабного решения однотипных задач моделирование сетей с одной и той же технологией и различными структурными схемами (топологией), параметрами оборудования и программного обеспечения требуется новая парадигма моделирования. Особенную актуальность задача приобретает в рамках управляемой моделью разработки [6]. В работах [3, 8] предложена новая парадигма моделирования телекоммуникационных сетей раскрашенными сетями Петри на основе реентерабельных компонентов, параметризации топологии и переключения тегов.

В настоящей работе построена реентерабельная модель сети IP-RIP, которая позволяет автоматизировать оценку функциональных характеристик [8, 9] конкретных за-

данных сетей, что способствует сокращению сроков их проектирования. Кроме того, модель может быть использована для оптимизации параметров самого протокола RIP, его дальнейшего развития и разработке новых протоколов дистанционно-векторной маршрутизации.

### 3 МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Для решения поставленных задач построены модели, реализующие взаимодействие маршрутизаторов и ТС, работу RIP протокола, генерацию трафика и расчет параметров QoS, для IP-сетей с произвольной топологией. Описание топологии сети содержит связи между маршрутизаторами и связи между маршрутизаторами и ТС, информацию о подключении устройств к портам. Модель, описывающая основные взаимодействия в сети маршрутизатора с маршрутизатором и маршрутизатором с ТС, представлена на рис. 1.

Топология сети является одним из основных параметров модели и описана в позиции *Topology*. Количество маршрутизаторов и ТС также являются параметрами модели, их значения задаются соответствующими константами в объявлении переменных, функций и констант, описанных с помощью языка программирования CPN ML. Взаимодействие маршрутизатора с маршрутизатором реализуется переходом *Router*, который представляет подмодели всех маршрутизаторов сети, и позициями *rIN*, *rOUT*, маркировка которых описывает все порты всех маршрутизаторов. Передача данных в сети осуществляется последовательностью срабатывания переходов *SwitchTagR* и *TransmitR*, т.е. пакет из выходного

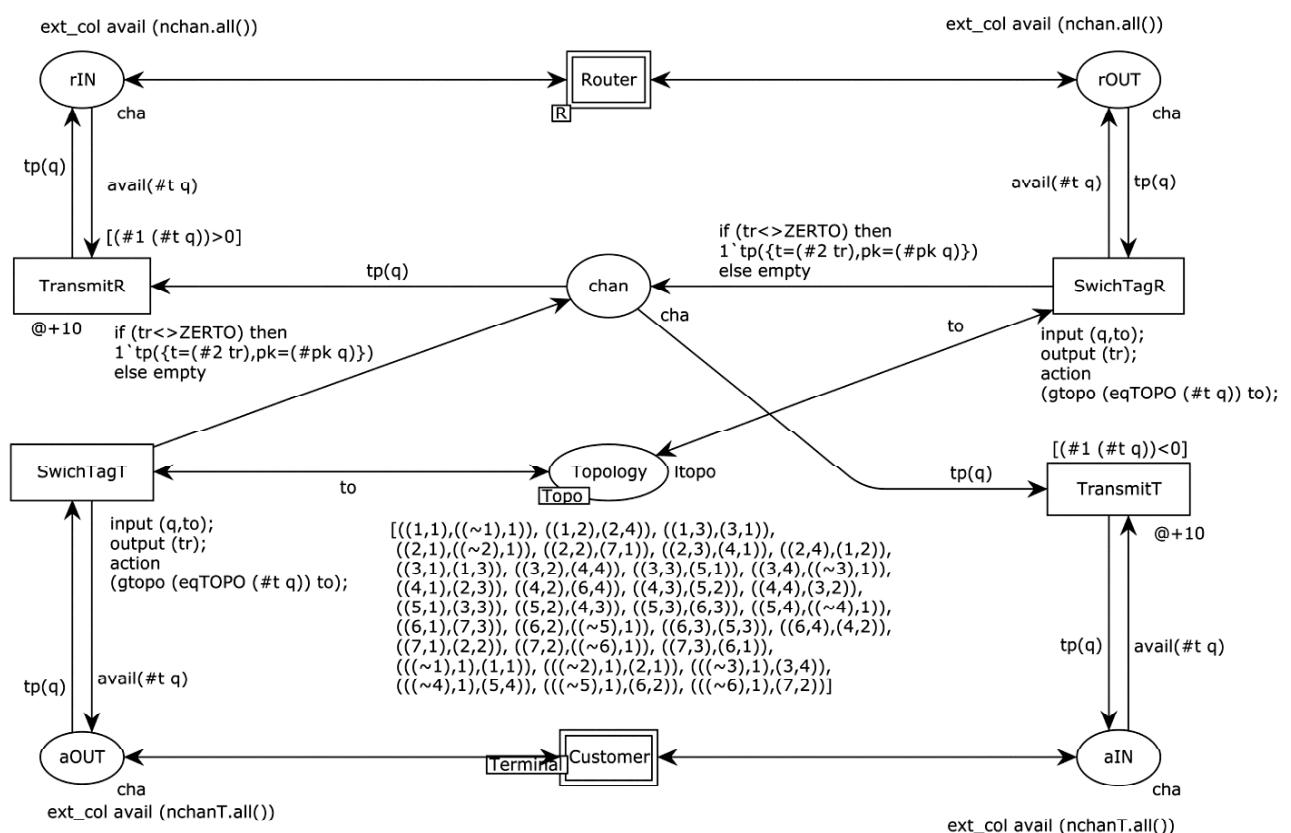


Рисунок 1 – Модель взаимодействия элементов сети

порта  $rOUT$  перенаправляется во входной порт  $rIN$  в соответствии с топологией сети за счет переключения тегов, идентифицирующих положение пакета в сети. Промежуточная позиция  $chan$  моделирует каналы передачи данных в сети, пакеты передаются на вход маршрутизаторов, выполняется переход  $TransmitR$ , или ТС, выполняется переход  $TransmitT$ .

Модель взаимодействия маршрутизатора с ТС в сети представлена следующими компонентами: переход *Customer* и позиции *aIN*, *aOUT* моделируют все ТС и их входные/выходные порты, соответственно. Передачу пакета в сеть (позицию *chan*), сгенерированного ТС, осуществляет переход *SwitchTagT*, выполняется функция *gtopo()*, которая в соответствии с топологией сети (позицией *Topology*) переключает теги, определяет следующее положение пакета в сети: номер и порт маршрутизатора. Если рассмотреть описание типов и переменных, то структура пакета в модели *q=record t:tag\*pk:pktrtm* состоит из двух основных частей тега *tag* и привычного IP-пакета *pk*.

Таким образом, за счет параметров сети и процедуры переключения тегов, обеспечивается повторная входимость в элементы модели (позиции  $rIN$ ,  $rOUT$ ,  $aIN$ ,  $aOUT$ ), позволяющая существенно сократить размер модели, свернув топологию сети, и как следствие, время исследования сети при разных условиях.

## Построение моделей, выполняющих динамическую маршрутизацию в IP-сети на основе протокола RIP, реа-

лизовано на выше описанных принципах построения реинтегрируемых моделей. Модель порта IP-маршрутизатора с RIP компонентами, представленная на рис. 2, описывает все порты всех IP-маршрутизаторов сети. Основными позициями модели маршрутизатора являются *IN* и *OUT* входные/выходные порты ( $28=7*4$  элементов в каждой позиции), *Buf* буфер маршрутизатора, *RT* таблица маршрутизации (7 элементов, по количеству маршрутизаторов). Переход *getpkt* в соответствии с таблицей маршрутизации определяет выходной интерфейс адреса назначения, выполняется функция *grec()*, переключает тег номера порта и записывает пользовательский пакет в буфер маршрутизатора. Если в таблице маршрутизации отсутствует информация об IP-адресе получателя, то пакет удаляется, счетчик потерянных пакетов, позиция *ndrop*, увеличивается на единицу. Переход *put* извлекает пакет из буфера маршрутизатора и направляет в выходной порт позицию *OUT*. Далее пакет попадает на главную страницу модели, описанную выше и представленную на рис. 1. Все порты моделей работают в полнодуплексном режиме передачи данных с обязательной проверкой свободности/ занятости порта.

Опишем компоненты модели, реализующие работу протокола RIP. Процесс функционирования протокола запускают переход *initRT* и позиция *rnum*, создавая пустые таблицы маршрутизации в позицию *RT* по количеству маршрутизаторов в сети. Количество маршрутизаторов и ТС определяются константами *RN* и *TN*. Первые

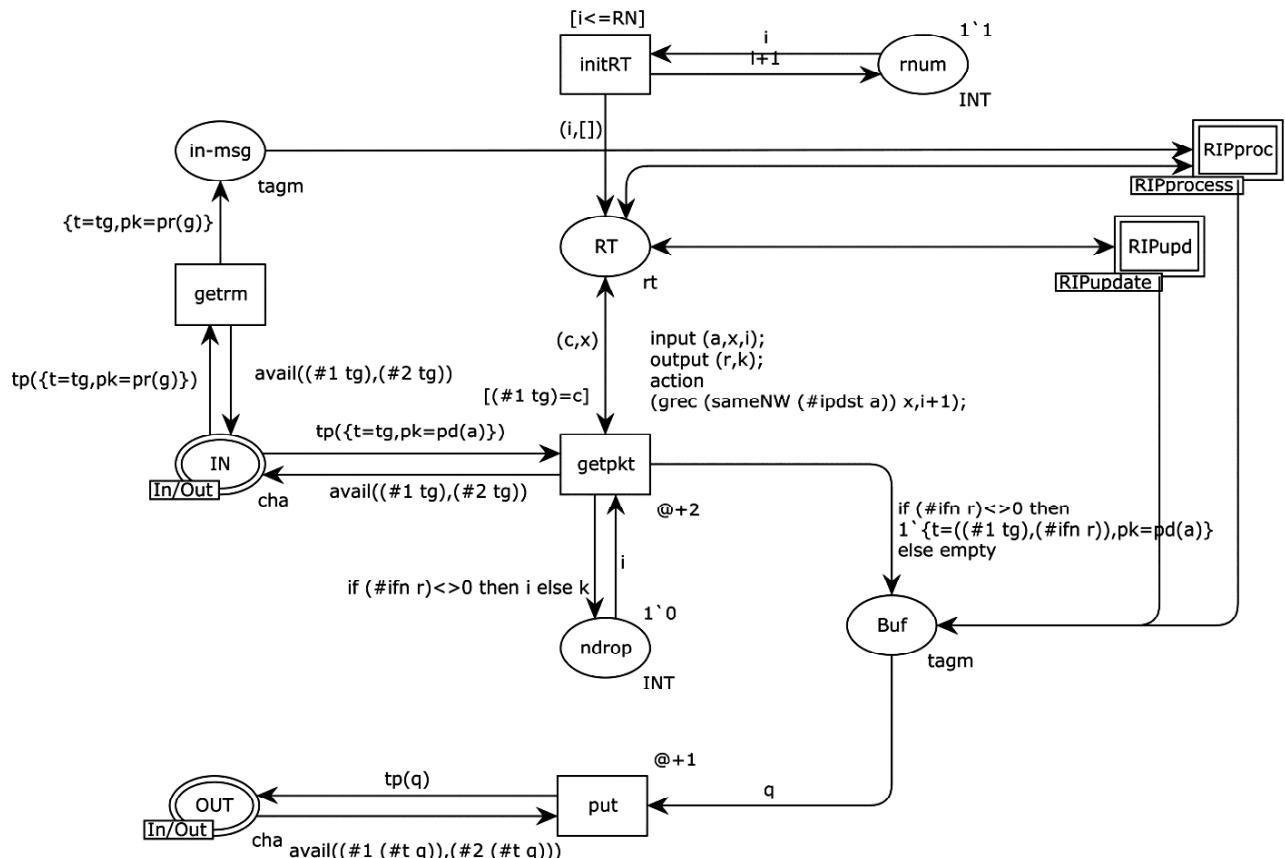


Рисунок 2 – Модель порта IP-маршрутизатора с RIP компонентами

записи в таблице маршрутизации определяются наличием присоединенных TC, при поступлении во входной порт позицию *IN* служебной информации, запускается переход *getrm*, который помещает пакет в совмещенную позицию *in-msg*. Далее пакет обрабатывается подмоде-

лем *RIPproc*, которая представлена на рис. 3. Процедура *RIPupd* моделирует передачу таблицы маршрутизации соседним маршрутизаторам и запускается в соответствии с заданными технологическими периодами, подмодель представлена на рис. 4.

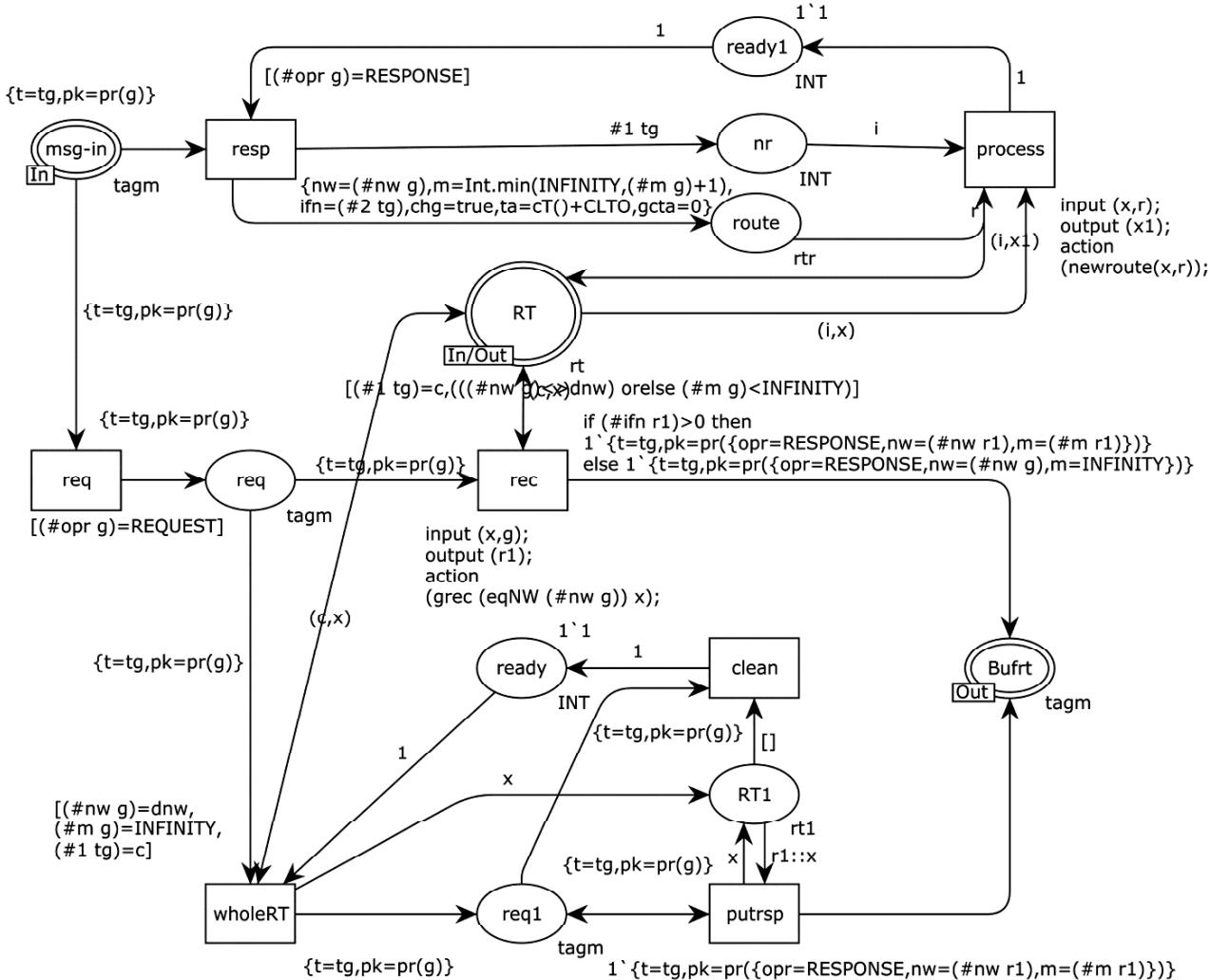


Рисунок 3 – Модель обробки повідомлень протокола RIP

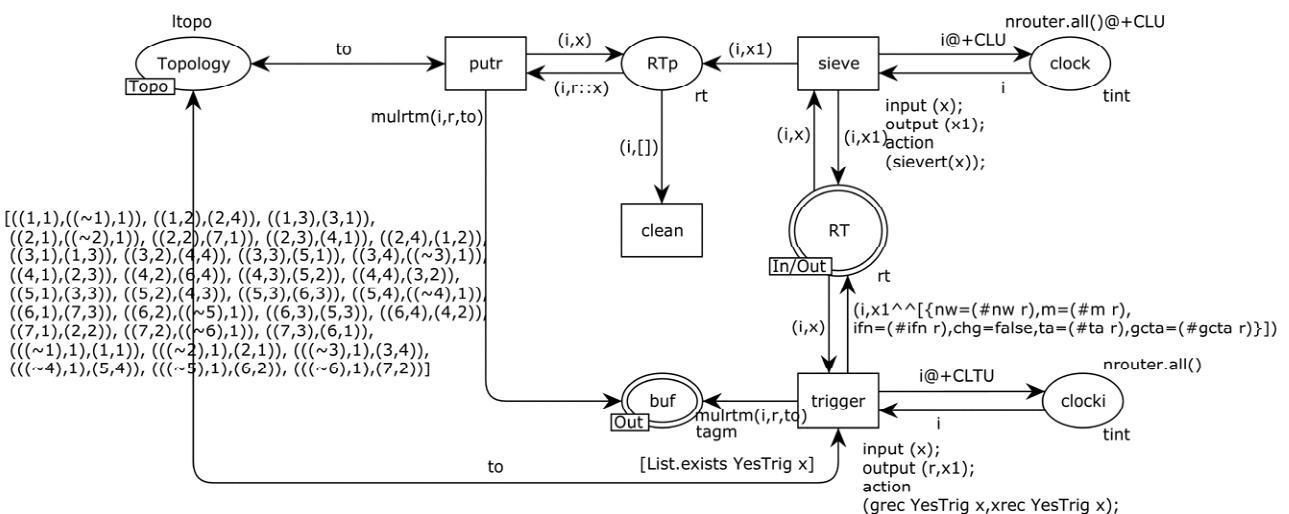


Рисунок 4 – Модель передачі таблиці маршрутизации по таймерам

Модель обробки сообщений протокола RIP виконує две функції: обробку команди відповіді RESPONSE та запиту REQUEST. Переход *resp* преобразує відповідь в формат запису таблиці маршрутизації та зберігає запис у позиції *route*, метрика зростає на одиницю ( $\#m g$ ) + 1, встановлюється признак зміни *chg=true*, змінюється таймаут старення *ta=cT() + CLTO*. Переход *process* оброблює маршрутне оновлення з допомогою функції *newroute()*.

При обробці запиту розглядають запит на передачу однієї записи, виконуваний переходом *rec*, та всієї таблиці, виконуваний переходом *wholeRT*. При формуванні відповіді переход *rec* виконує пошук указаної в запиті записи з допомогою функції *grec()* та возвращає відповідну запис; при відсутності записи вказується метрика INFINITY. Для передачі всієї таблиці переход *wholeRT* дублює її в позицію *RT1* та переходом *putrsp* таблиця передається по записям в буфер маршрутизатора позицію *Bufrt*; переход *clean* виконує очистку пустої таблиці та возвращає признак готовності *ready* для наступного сеанса обробки запиту.

Робота компоненти *RIPupdate*, представленої на рис.4, аналогична обробці запиту, тільки ініціюється по таймерам. Вся таблиця ретранслюється в буфер маршрутизатора позицію *buf* переходом *putr*, при запуску таймера регулярних оновлень *clock*. Для цього в позиції *RTp* зберігається копія таблиці при виконенні перехода *sieve*, при копіюванні таблиці реалізована її фільтрація відповідно до таймаутами функцією *sievert()*; переход *clean* очищає пусту таблицю. Функція *mulrec()* використовує інформацію про топологію мережі та слугує для дублювання запису на всі порти. Для формування однієї записи з встановленим признаком *chg* виконується переход *trigger* та функція *grec()* при запуску таймера триггерних оновлень *clocki*, запис передається в буфер маршрутизатора позицію *buf* з тегами, отриманими функцією *mulrec()*.

Передаваемые пакеты и локальные данные снабжены тегами, задающими конкретное положение в сети, что позволяет моделировать одновременно работу всех устройств.

#### 4 ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Для оценки параметров качества обслуживания и эффективности сети с динамической маршрутизацией на основе протокола RIP модель ТС, предложенная в [3], представлена реентерабельной моделью в форме раскрашенной сети Петри. В модель ТС добавлены измерительные фрагменты [8], представленные рис. 5, для расчета среднего времени доставки пакета, максимального и минимального времени доставки пакета, количества отправленных и принятых пользовательских пакетов, сообщений протокола RIP, среднеквадратичные отклонения от среднего времени доставки пакета.

Для отладки модели использовался пошаговый режим имитации системы CPN Tools, при этом выполнялась трассировка прохождения отдельных сообщений протокола RIP и пользовательских пакетов через сеть.

Для проверки работоспособности модели и адекватности получаемых результатов с ранее проведенными исследованиями, была выбрана схема фрагмента Европейской магистрали Интернет [4], представленная на рис. 6.

Европейская магистраль Интернет содержит семь маршрутизаторов R1...R7 и шесть ТС T1...T6. Всего использовано 24 IP-сети, при этом каждая из 6 ТС содержит IP-адреса в адресном пространстве соответствующих стран.

Для расчета параметров качества обслуживания выполнялось скоростное моделирование на длительных интервалах времени, количество выполняемых операций (параметр Step) не менее одного миллиона. Измерения производились в условиях слабой (функция генерации трафика *Delay()*=100..200) и средней (*Delay()*=10..20) нагрузки, генерируемой ТС; влияние пиковой нагрузки не исследовалось.

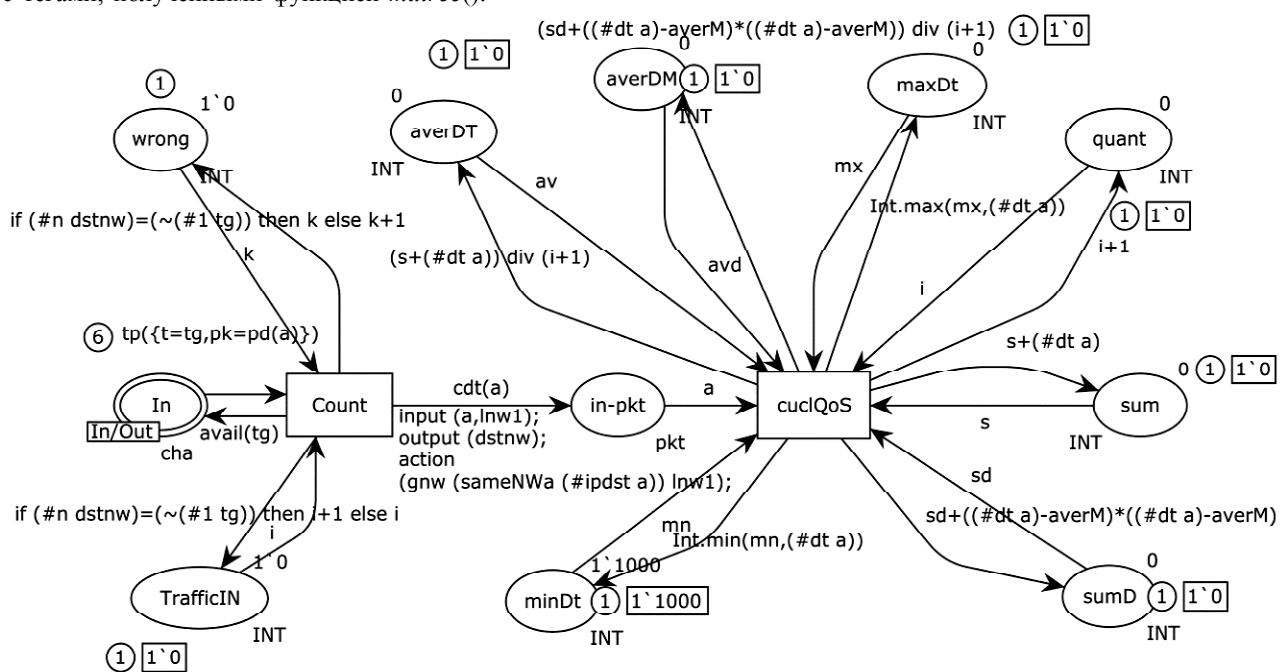


Рисунок 5 – Модель измерительных фрагментов для расчета QoS

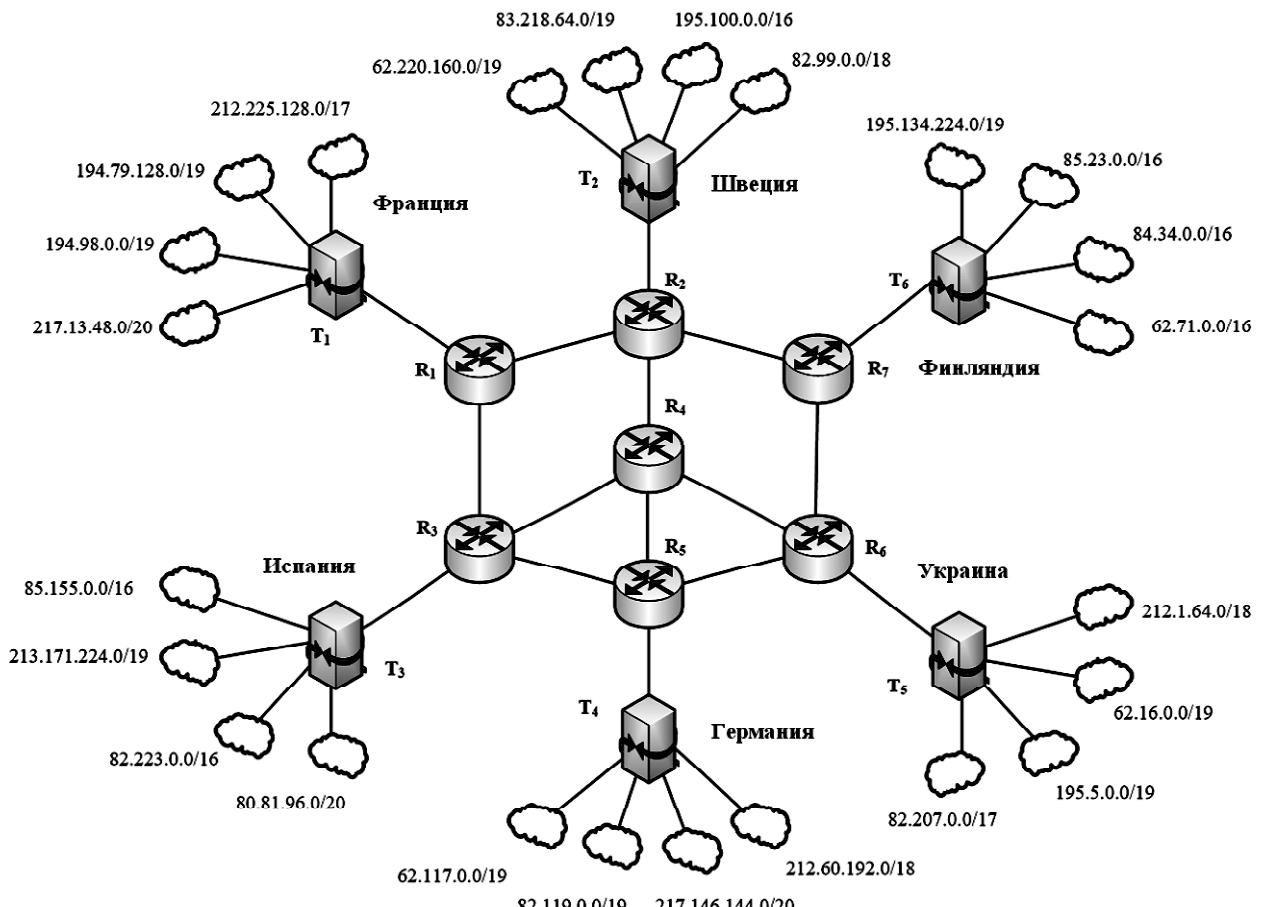


Рисунок 6 – Схема фрагмента Европейської магістралі Інтернет

## 5 РЕЗУЛЬТАТИ

Результаты проведенных экспериментов представлены в табл. 1 в условиях слабой нагрузки и табл. 2 при средней нагрузке.

Как видно из табл. 1, метод измерительных фрагментов, предложенный в [8], позволяет существенно сократить количество дополнительных расчетов параметров QoS, так как вычисления производятся непосредственно в процессе выполнения модели, при этом обеспечивается заданная точность вычислений.

Предложенный метод построения элементов моделей сети реентерабельными моделями в форме раскрашенных сетей Петри позволяет получать оценки средних и других статистических моментов для всех ТС и для отдельной ТС в частности на одной модели, что существенно сокращает размер модели.

Таблица 1 – Значения параметров QoS при слабой нагрузке

Параметры	Обычный режим	Отключен 1 порт	Отключено 2 порта
Среднее ВДП, MTU	42	45	47
Min ВДП, MTU	34	34	34
Max ВДП, MTU	245	257	260
Дисперсия, MTU	128	148	205
$\sigma$ , MTU	11,31	12,16	14,32
TrIN, пакетов	49185	46657	45272
Модельное время	1272852	1212394	1178962
Traf, пакет/MTU	0,0386	0,0384	0,0383

Таблица 2 – Значения параметров QoS при средней нагрузке

Параметры	Обычный режим	Отключен 1 порт	Отключено 2 порта
Среднее ВДП, MTU	51	55	55
Min ВДП, MTU	34	34	34
Max ВДП, MTU	547	571	576
Дисперсия, MTU	472	535	565
$\sigma$ , MTU	21,72	23,13	23,78
TrIN, пакетов	54681	51542	50537
Модельное время	184727	176410	173196
Traf, пакет/MTU	0,296	0,292	0,291

## 6 ОБСУЖДЕНИЕ

Предложенный метод построения моделей по сравнению с методом прямого отображения [4] обеспечивает существенно большую скорость построения модели сети и оценки параметров качества обслуживания, сокращается время корректировки модели при изменении топологии и других характеристик сети.

По сравнению с методом построения параметрических моделей [3, 5] предложенный метод обеспечивает не только параметризацию моделей элементов сети, что уменьшает размер модели, но и их повторную входимость, что сокращает количество элементов модели.

Эффективность применения разработанного метода будет тем выше, чем ближе построенная модель к промышленной реализации исследуемой сети и протоколу маршрутизации.

## ВЫВОДЫ

В работе решена задача автоматизации оценки функциональных характеристик IP-сетей с динамической маршрутизацией на основе протокола RIP в процессе проектирования сетей. Предложен метод построения реентерабельных моделей, который представляет собой дальнейшее развитие моделей телекоммуникационных систем в форме сетей Петри и преобразования их в класс реентерабельных раскрашенных сетей Петри. Практическая значимость полученных результатов заключается в том, что построена реентерабельная модель, реализующая предложенный метод, на основе которого может быть решена практическая задача сокращения сроков проектирования IP-сетей, выполняющих динамическую маршрутизацию и проведения экспресс анализа оценки числовых характеристик параметров качества обслуживания сети. Результаты могут быть применены для всех протоколов дистанционно-векторного типа при проектировании телекоммуникационных сетей с произвольной топологией.

Перспективы дальнейших исследований состоят в том, чтобы учитывать полученные результаты при разработке новых и оптимизации параметров существующих протоколов динамической маршрутизации.

Шмелева Т. Р.

Канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри комутаційних систем Одеської національної академії зв'язку ім. О. С. Попова, Одеса, Україна  
**РЕЕНТЕРАБЕЛЬНА МОДЕЛЬ RIP ПРОТОКОЛУ У ФОРМІ РОЗФАРБОВАНІХ СІТЕЙ ПЕТРИ**

Розв'язано задача автоматизації оцінки функціональних характеристик IP-мереж з динамічною маршрутизацією на основі протоколу RIP в процесі проектування мереж. Запропоновано метод побудови реентерабельних моделей, який забезпечує повторне використання моделей, орієнтованих на технології та інваріантних до структури мережі. Для проведення обчислювальних експериментів і отримання числових оцінок параметрів якості обслуговування IP-мережі до моделей термінальних мереж додані вимірювальні фрагменти в параметричному вигляді. Проведено порівняльний аналіз параметрів якості обслуговування IP-мережі при слабкому та середньому навантаженні в умовах нормальног режиму роботи і при тимчасовому відключені портів маршрутизаторів. Отримано оцінку корисної пропускності мережі при різних видах навантаження і умов функціонування мережі. В результаті проведених експериментів виявлено, що значення параметрів якості обслуговування досліджуваної мережі істотно не змінюються при нормальному режимі роботи і тимчасовому відключені портів маршрутизаторів, зміна значень дисперсії є індикатором проблем в мережі. Автоматизація оцінки характеристик сприяє скороченню термінів проектування мереж.

**Ключові слова:** протокол динамічної маршрутизації, протокол RIP, мережа IP, реентерабельна модель, розфарбована сіть Петри, середній час доставки пакета.

Shmeleva T. R.

PhD, Associate Professor, Associate Professor of Switched System department, A. S. Popov, Odesa, National Academy of Telecommunications, Odesa, Ukraine

## REENTERABLE MODEL OF RIP PROTOCOL IN COLORED PETRI NETS FORM

The automation task of evaluating the functional characteristics of IP-networks with dynamic routing based on RIP protocol is solved for the designing networks process. A method of reenterable model construction is proposed, this method provides reuse of models, which are technology-oriented and invariant to the network structure. Measuring fragments in parametric form added to the model of terminal networks for computing experiments and estimating of IP-network QoS parameters. A comparative analysis of IP-network QoS parameters carried out in conditions with low and medium load, and in a normal operating mode and temporarily disable the router ports. An estimation of the useful bandwidth obtained for different types of loads and conditions of the network operation. The experiments revealed that the values of QoS parameters of the tested network do not change significantly during normal operation and temporarily disable of the router ports, change the dispersion value is an indicator of problems in the network. Automation of performance evaluation promotes for reducing of network design terms.

**Keywords:** dynamic routing protocol, RIP protocol, IP network, reenterable model, colored Petri net, average delivery time.

## REFERENCES

1. Malkin G. RFC 2453: RIP Version 2. (November 1998), 39 p.
2. Hedrick C. Routing Information Protocol, *Network Working Group*, RFC 1058, 1988, 33 p.
3. Shmeleva T. R. Parametricheskay model IP setey v forme raskrashennih setey Petri, *Sbornik UNDIS*, 2009, No. 1 (9), pp. 70–77.
4. Zaitsev D. A. Clans of Petri Nets: Verification of protocols and performance evaluation of networks, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013, 292 p.
5. Shmeleva T.R. Osenka effektivnosti protocola dinamicheskoy marshrutisasi RIP raskrashennoy seti Petri, *Sbornik nauchnih trudov ONAS im. A.S. Popova*, 2015, No. 2, pp. 81–88.
6. Grady Booch...[et al.]. Object-Oriented Analysis and Design with Applications / *The Addison-Wesley Object Technology Series*, 3rd ed., Boston 2007, 691 p.
7. Gulyaev K. D., Zaitsev D. A. Dinamicheskay marshrutisaziyi v E6 setyah, *Radiotekhnika*, 2009, Vip. 159, pp. 294–301.
8. Zaitsev D. A., Shmeleva T. R. Ozenka harakteristik setey Ethernet s pomoschju parametricheskikh modeley Petri, *Zvyazok*, 2007, No. 4, pp. 62–67.
9. Ventzel E. S., Ovcharov L. A. Teoriya sluchainih prosessov i ee ingenernie prilogeniya. Moscow, Nauka. Red. fiz.-mat. lit., 1991, 384 p.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Malkin G. RFC 2453: RIP Version 2 / G. Malkin, (November 1998). – 39 p.
2. Hedrick C. Routing Information Protocol / C. Hedrick // Network Working Group. – RFC 1058, 1988. – 33 p.
3. Шмелева Т. Р. Параметрическая модель IP-сетей в форме раскрашенных сетей Петри / Т. Р. Шмелева // Сборник УНДИС. – 2009. – № 1(9). – С. 70–77.
4. Zaitsev D. A. Clans of Petri Nets: Verification of protocols and performance evaluation of networks / Zaitsev D. A. – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. – 292 p.
5. Шмелева Т. Р. Оценка эффективности протокола динамической маршрутизации RIP раскрашенной сетью Петри / Т. Р. Шмелева // Сборник научных трудов ОНАС им. А. С. Попова. – 2015. – № 2. – С. 81–88.
6. Object-Oriented Analysis and Design with Applications / Grady Booch [et al.]. The Addison-Wesley Object Technology Series, 3rd ed., Boston 2007. – 691 p.
7. Гуляев К. Д. Динамическая маршрутизация в Е6 сетях / К. Д. Гуляев, Д. А. Зайцев // Радиотехника. – 2009. – Вып. 159. – С. 294–301.
8. Зайцев Д. А. Оценка характеристик сетей Ethernet с помощью параметрических моделей Петри / Д. А. Зайцев, Т. Р. Шмелева // Звязок. – 2007. – № 4. – С. 62–67.
9. Вентцель Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М.: Наука. Ред. физ.-мат. лит., 1991. – 384 с.

Статья поступила в редакцию 13.06.2016.

После доработки 24.06.2016.

# УПРАВЛІННЯ У ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМАХ

## УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

### CONTROL IN TECHNICAL SYSTEMS

УДК 681.5.01

Кадырова Д. Р.<sup>1</sup>, Кадырова А. А.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Канд. техн. наук, доцент кафедры «Теоретическая электротехника и электронные технологии» Ташкентского государственного технического университета, Ташкент, Узбекистан

<sup>2</sup>Канд. техн. наук, зам. директора Межотраслевого центра стратегических инноваций и информатизации, Ташкент, Узбекистан

## СТРУКТУРНЫЙ СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В статье рассматривается методика расчета цифровых регуляторов дискретных систем управления с помощью динамических графовых моделей процессов. Предлагаемый метод моделирования позволяет найти пути для решения задач синтеза дискретных систем различной сложности: одномерных и многомерных, стационарных и нестационарных, с нестандартным режимом работы импульсных элементов и др. Решение задач анализа и синтеза сложных систем управления классическими методами оказывается часто несостоительным из-за вычислительных трудностей. Применение графовых моделей позволяет выполнить четкую и строгую формализацию и автоматизацию вычислительных процедур. Используется фундаментальное свойство дискретных систем, а именно, способность к естественной декомпозиции и структуризации. Любые дискретные элементы в составе систем управления рассматриваются не только как источники дискретизации сигналов, но и как источники дискретизации структуры системы. Предложенный метод позволяет синтезировать законы управления по выбранным критериям оптимальности и максимально близко учитывать характеристики и свойства реальных объектов управления.

**Ключевые слова:** дискретная система управления, структурный синтез, цифровой регулятор, запаздывание, динамическая графовая модель.

#### НОМЕНКЛАТУРА

ГПС – граф переменных состояния;  
ДГМ – динамическая графовая модель;  
ИЭ – импульсный элемент;  
САР – система автоматического регулирования;  
 $A_0(p)$  – передаточная функция объекта управления;  
 $a_{ij}$  – коэффициент веса дуги  $(u(jT^+), y(iT))$ ;  
 $B$  – оператор обратной связи по состоянию;  
 $D(z)$  – передаточная функция цифрового регулятора;  
 $e(jT^+)$  – сигнал ошибки;  
 $f(t)$  – входное воздействие;  
 $f^1, f^2$  – входные воздействия;  
 $G(u, r)$  – существенный граф системы;  
 $G_{l-1}(u_{l-1}, r_{l-1})$  –  $(l-1)$ -ый подграф системы;  
 $H_0$  – выходная функция системы;  
 $k_j$  – переменный коэффициент усиления;

© Кадырова Д. Р., Кадырова А. А., 2016  
DOI 10.15588/1607-3274-2016-4-13

$l$  – порядок дифференциального уравнения объекта управления;

$r_{ij}$  – коэффициенты функции веса приведенной непрерывной части;

$t$  – время;

$t_{\min}$  – минимальное время переходного процесса;

$T$  – период прерывания импульсного элемента;

$u$  – управляющее воздействие;

$u^1, u^2$  – управляющие воздействия, пропорциональные перемещениям затворов;

$\bar{x}(0)$  – начальное состояние объекта;

$\bar{x}(mT)$  – переменные состояния объекта;

$y$  – выходная функция системы;

$y^{(i)}$  –  $(i)$ -ая производная выходной функции системы;

$y^1, y^2, H^0$  – выходные функции, соответствующие уровню воды в отдельных каналах;

$\beta_{lk}$  – коэффициент обратной связи;

$\varphi$  – отображение;  
 $\tau$  – запаздывание;  
 $\bar{\tau}$  – относительное время запаздывания.

## ВВЕДЕНИЕ

Объекты регулирования ирригационных и водно-энергетических систем описываются, как правило, дифференциальными уравнениями в частных производных, учитывающими такие основные особенности распределенных процессов, как волновая передача расхода воды, изменение инерционности, чистого запаздывания вдоль каналов, влияние отраженных волн на динамику процессов и т.д. Точные решения уравнений имеют обычно сложный громоздкий вид, и их использование для анализа и синтеза систем управления встречает значительные трудности. Поэтому на практике применяют аппроксимацию передаточных функций сложных систем с распределенными параметрами при помощи передаточных функций систем с сосредоточенными параметрами и эквивалентных постоянных времени чистого запаздывания. Наличие запаздывания, как известно, ухудшает устойчивость и динамические свойства процесса [1–4, 6–8]. Вследствие этого одной из первоочередных задач, возникающих при проектировании систем регулирования водными объектами, должна быть задача компенсации вредного влияния запаздывания. Другим важным требованием является уменьшение времени переходных процессов в системе или задача максимального быстродействия системы. Увеличение быстродействия, в свою очередь, приводит к уменьшению числа необходимых управляющих воздействий и, соответственно, к уменьшению количества срабатываний исполнительных механизмов. Большое значение при проектировании систем регулирования водными объектами имеет подбор параметров системы и управляющих воздействий таким образом, чтобы переходные процессы в системе имели апериодический характер, так как перерегулирование может привести к холостым сбросам или недобору воды [3].

Таким образом, при проектировании систем автоматического регулирования гидротехническими сооружениями необходимо исходить из следующих требований: обеспечение минимального времени переходного процесса; компенсация влияния запаздывания на характер и устойчивость переходных процессов; апериодический закон изменения выходной функции системы. Важным фактором является также выбор закона функционирования регуляторов.

Цель данной работы заключается в разработке методики расчета цифровых регуляторов дискретных систем с запаздыванием на основе применения динамических графовых моделей процессов [5].

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе рассматривается дискретная система управления, непрерывная часть которой содержит запаздывание (рис. 1а).

Ставится задача получения в заданной системе с запаздыванием  $\tau$  такого оптимального по быстродействию процесса на выходе, который отличался бы от процесса в соответствующей системе без запаздывания лишь сдвигом (отставанием) на время  $\tau$ .

## 1 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Возрастающая сложность систем управления ставит новые задачи, связанные с изучением их структурных свойств; необходимостью систематизации математического описания элементов различной физической природы; унификацией методов расчета, анализа и синтеза; необходимостью преодоления вычислительных трудностей; стремлением к предельной наглядности и простоте.

Особую значимость эти вопросы имеют для дискретных автоматических систем управления. Здесь наличие множества импульсных элементов, которые работают по различным линейным и нелинейным законам; многосвязность; запаздывание вносят разнообразие и сложность в структуру процессов [1–4, 6–11]. В основе математического аппарата дискретных систем положены решетчатые функции, конечные разности и суммы, линейные и нелинейные разностные уравнения. Вместе с тем, в классических работах существенное вниманиеделено проблемам «сближения» отдельных аспектов теории непрерывных и дискретных систем. В частности, это касается множества работ, охватывающих частотные методы анализа и синтеза дискретных систем, связи преобразования Лапласа и дискретного преобразования Лапласа и других аспектов [1, 2, 9, 10, 12–14]. Решение задач расчета и проектирования дискретных систем управления на основе применения данных методов требует весьма громоздких и сложных выкладок и преобразований, например, уже при переходе от одномерных к многомерным линейным системам, от синхронно-синхронных к асинхронным системам и т.д. Объясняется это тем, что дискретные системы рассматриваются с позиций «единого целого». При этом каждый новый режим работы импульсных элементов (с циклической частотой квантования информации, многократный, с конечным временем съема данных и др.) требует своей методики с целью преодоления возникающих трудностей.

Главным же ограничением отмеченных выше методов является отсутствие возможности учета фундаментального свойства дискретных систем – способности к естественной декомпозиции и структуризации. Это обстоятельство является прямым следствием того факта, что импульсные элементы, вычислительные устройства с дискретным принципом действия в известных работах других авторов рассматриваются только как источники дискретизации сигналов.

Иной взгляд на физику работы дискретных систем управления говорит о том, что любые дискретные элементы в их составе следует рассматривать не только как источники дискретизации сигналов, но и как источники дискретизации структуры системы. Изображая систему более детально, чем структурная схема, динамические графовые модели сохраняют наглядное представление о прохождении сигнала через систему. Это упрощает определение не только передаточной функции, но и показывает влияние какого-либо параметра на нее, дает возможность получения множества возможных структур и практических рекомендаций по выбору конкретных структур для реализации необходимых связей в системе [5, 15].

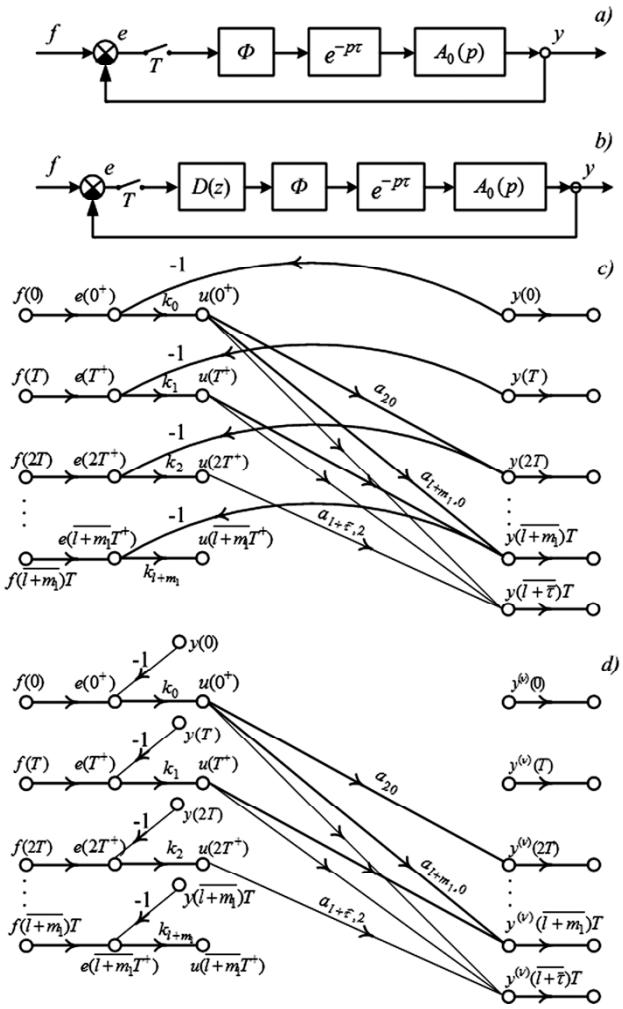


Рисунок 1 – Дискретная система управління а – с запаздыванием, б – схема с последовательной коррекцией, с, д – динамические графовые модели процессов

## 2 МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Структурная схема компенсированной системы может быть реализована с помощью последовательной коррекции (рис. 1б). Передаточную функцию цифрового регулятора  $D(z)$  будем выбирать, исходя из условия бесконечной степени устойчивости, то есть конечной и минимальной длительности процесса. Последний, кроме этого, должен иметь монотонный (апериодический) характер. Цифровой регулятор представим в виде усилильного элемента с переменным коэффициентом усиления  $k_j$ . Минимальное время переходного процесса в компенсированной системе с запаздыванием равно

$$t_{\min} = (l + \bar{\tau})T. \quad (1)$$

Для получения системы с максимальным быстродействием при входных воздействиях вида ступенчатой функции и нулевых начальных условиях необходимо, чтобы при  $t < (l + \bar{\tau})T$  выход оставался меньше входа и ошибка системы при  $t \geq (l + \bar{\tau})T$  равнялась нулю. Эти условия удовлетворяются, если

$$y(l + \bar{\tau} T) = f(l + \bar{\tau} T), \quad (2)$$

$$\dot{y}(l + \bar{\tau} T) = \ddot{y}(l + \bar{\tau} T) = \dots = y^{(l-1)}(l + \bar{\tau} T) = 0. \quad (3)$$

Для определения значений  $k_j$  и  $D(z)$  строим динамические графовые модели выходного процесса и его производных [5]. На рис. 1с,д построены для системы  $l$ -го порядка с  $\tau = 2T$ . Объединение подграфа  $G_1(u_1, \varphi_1)$  с вершинами

$$u_1 = \{u(0^+), u(T^+), \dots, u(l-1T^+), y(l + \bar{\tau} T)\} \quad (4)$$

и отображениями

$$\begin{aligned} \varphi_1 u(0^+) &= \{y(l + \bar{\tau} T)\}, \\ \varphi_1 u(T^+) &= \{y(l + \bar{\tau} T)\}, \\ \dots \\ \varphi_1 u(l-1T^+) &= \{y(l + \bar{\tau} T)\}, \end{aligned} \quad (5)$$

подграфа  $G_2(u_2, \varphi_2)$  с вершинами

$$u_2 = \{u(0^+), u(T^+), \dots, u(l-1T^+), \dot{y}(l + \bar{\tau} T)\} \quad (6)$$

и отображениями

$$\begin{aligned} \varphi_2 u(0^+) &= \{\dot{y}(l + \bar{\tau} T)\}, \\ \varphi_2 u(T^+) &= \{\dot{y}(l + \bar{\tau} T)\}, \\ \dots \\ \varphi_2 u(l-1T^+) &= \{\dot{y}(l + \bar{\tau} T)\} \end{aligned} \quad (7)$$

и подграфа  $G_{l-1}(u_{l-1}, \varphi_{l-1})$  с вершинами

$$u_{l-1} = \{u(0^+), u(T^+), \dots, u(l-1T^+), y^{(l-1)}(l + \bar{\tau} T)\} \quad (8)$$

и отображениями

$$\begin{aligned} \varphi_{l-1} u(0^+) &= \{y^{(l-1)}(l + \bar{\tau} T)\}, \\ \varphi_{l-1} u(T^+) &= \{y^{(l-1)}(l + \bar{\tau} T)\}, \\ \dots \\ \varphi_{l-1} u(l-1T^+) &= \{y^{(l-1)}(l + \bar{\tau} T)\} \end{aligned} \quad (9)$$

позволяет получить существенный граф системы

$$G(u, \varphi) = G_1(u_1, \varphi_1) \cup G_2(u_2, \varphi_2) \cup \dots \cup G_{l-1}(u_{l-1}, \varphi_{l-1}) \quad (10)$$

с вершинами

$$u = \{u(0^+), u(T^+), \dots, u(l-1T^+), y(l + \bar{\tau} T), \dot{y}(l + \bar{\tau} T), \dots, y^{(l-1)}(l + \bar{\tau} T)\} \quad (11)$$

и отображениями

$$\begin{aligned} \varphi u(0^+) &= \{y(l + \bar{\tau} T), \dot{y}(l + \bar{\tau} T), \dots, y^{(l-1)}(l + \bar{\tau} T)\}, \\ \varphi u(T^+) &= \{y(l + \bar{\tau} T), \dot{y}(l + \bar{\tau} T), \dots, y^{(l-1)}(l + \bar{\tau} T)\}, \\ \dots \\ \varphi u(l-1T^+) &= \{y(l + \bar{\tau} T), \dot{y}(l + \bar{\tau} T), \dots, y^{(l-1)}(l + \bar{\tau} T)\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Полученный граф для случая  $l=3$ ,  $\tau = 2T$  изображен на рис. 2а. Используя соответствующие преобразования существенного графа (исключение узлов, инвертирование, суммирование и т. д.), получим граф управляющих воздействий (рис. 2б), по виду которого сразу находим значения искомых управляющих воздействий. Далее по виду ДГМ (рис. 1с) находим значения  $y(0), y(T), y(2T), \dots, y(\overline{l+m_1}T)$  в моменты квантования ИЭ,  $m_1$  – целое число.

Кусочно-постоянные коэффициенты усиления определяются непосредственно по графу, либо по формуле:

$$k_j = \frac{u(jT^+)}{f(jT) - y(jT)}, \quad (j \in J = \{0, 1, 2, \dots, l + m\}). \quad (13)$$

Передаточная функция искомого цифрового регулятора находится как отношение  $z$ -преобразований последовательности управлений и ошибок рассогласования:

$$D(z) = \frac{\sum_{j=0}^{l+m} k_j e(jT^+) z^{-j}}{\sum_{j=0}^{l+m} e(jT^+) z^{-j}}, \text{ где } e(jT^+) = f(jT) - y(jT). \quad (14)$$

Полученная передаточная функция цифрового регулятора (14) обеспечивает на выходе системы апериодический процесс конечной и минимальной длительности, отличающийся от процесса в такой же системе без запаздывания лишь сдвигом на время запаздывания  $\tau$ .

В том случае, если за выходную координату системы принято отклонение уровня воды в канале от заданного, можно использовать модификацию ДГМ – граф переменных состояния (ГПС).

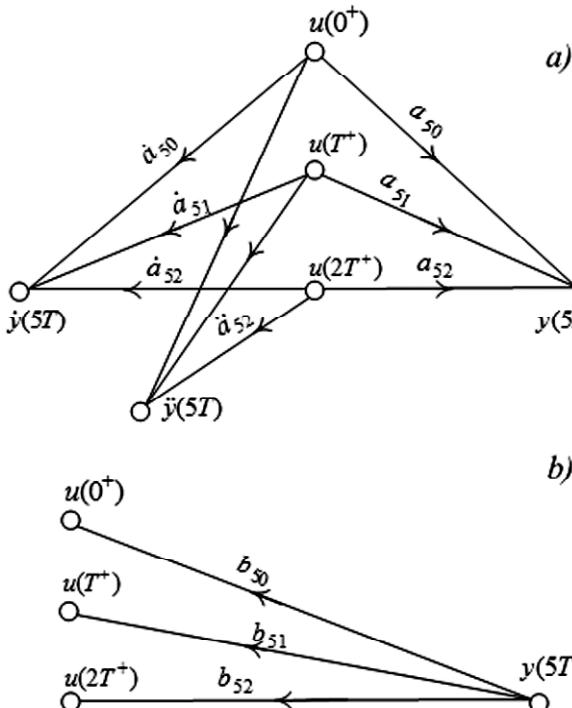


Рисунок 2 – Существенный граф системы (а),  
граф управляющих воздействий (б)

Пусть начальное состояние процесса характеризуется вектором  $\vec{x}(0) \neq 0$ , то есть отклонением уровня воды от заданного. За положение равновесия системы (рис. 3а) примем начало координат пространства состояний процесса. Требуется перевести объект из начального состояния  $\vec{x}(0)$  в нулевое состояние за минимальное число шагов дискретности при соблюдении условия компенсации влияния запаздывания.

Для нахождения закона управления используем свойство линейного объекта, заключающееся в том, что линейный объект  $l$ -го порядка с запаздыванием  $e^{-p\tau}$  может быть переведен из любого начального состояния  $\vec{x}(0)$  в состояние равновесия за время, равное  $t_{\min} = (l + \bar{\tau})T$ , откуда

$$\vec{x}(\overline{l + \bar{\tau}T}) = \vec{0}. \quad (15)$$

Для упрощения изложения будем считать, что относительное время запаздывания равно целому числу  $\bar{\tau} = m_1$ , тогда (15) преобразуется к виду:

$$\vec{x}(\overline{l + m_1}T) = \vec{0}. \quad (16)$$

Построив исходный ГПС рассматриваемого процесса и определив передачи между переменными состояния, развернем граф на интервале времени  $(m_1 T; \overline{l + m_1}T)$  (рис. 3б).

Исключим все промежуточные узлы, соответствующие переменным  $\vec{x}(\overline{l + 1}T), \vec{x}(\overline{l + 2}T), \dots, \vec{x}(\overline{l + m_1 - 1}T)$ . Учитывая, что состояние системы до момента  $t = m_1 T$  не изменяется, то есть  $\vec{x}(m_1 T) = \vec{x}(\overline{m - 1}T) = \dots = \vec{x}(0)$ , по-

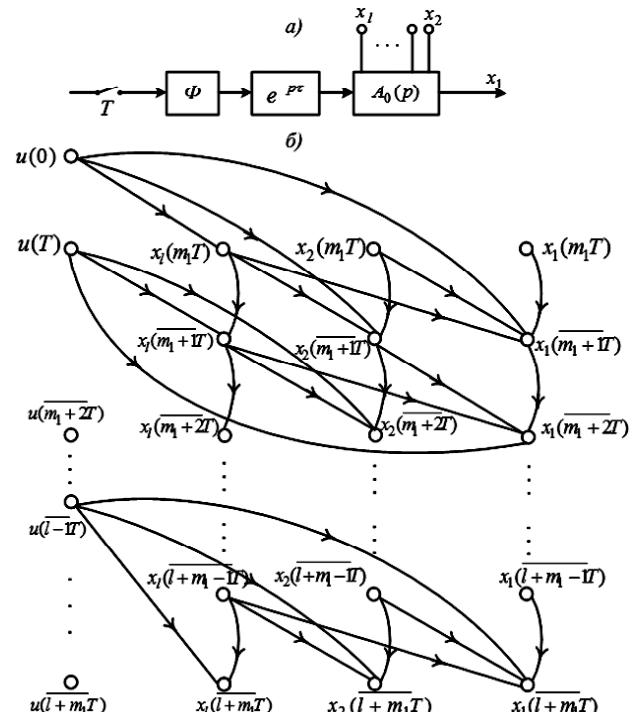


Рисунок 3 – Система управления с запаздыванием (а), граф системы, развернутый на интервале времени  $(m_1 T; \overline{l + m_1}T)$  (б)

лучим существенный граф переменных состояния, представленный на рис. 4а, непосредственно откуда, учитывая (16), можно записать:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1 \left[ \vec{x}(0), u(0), u(T), \dots, u(\overline{l-1T}) \right] = 0 \\ \varphi_2 \left[ \vec{x}(0), u(0), u(T), \dots, u(\overline{l-1T}) \right] = 0 \\ \dots \\ \varphi_l \left[ \vec{x}(0), u(0), u(T), \dots, u(\overline{l-1T}) \right] = 0 \end{array} \right\}. \quad (17)$$

Преобразуя граф (рис. 4а) таким образом, чтобы получить передачи от переменных начального состояния объекта  $x_1(0), x_2(0), \dots, x_l(0)$  к узлам  $u(0), u(T), u(2T), \dots, u(\overline{l-1T})$ , получим граф управлений (рис.4б).

По виду последнего находим закон оптимального управления:

$$\left. \begin{array}{l} u(0) = \beta_{11}x_1(0) + \beta_{12}x_2(0) + \dots + \beta_{1l}x_l(0) \\ u(T) = \beta_{21}x_1(0) + \beta_{22}x_2(0) + \dots + \beta_{2l}x_l(0) \\ \dots \\ u(\overline{l-1T}) = \beta_{ll}x_1(0) + \beta_{l2}x_2(0) + \dots + \beta_{1l}x_l(0) \end{array} \right\}. \quad (18)$$

Полученная последовательность управляемых воздействий зависит от начального состояния системы  $\vec{x}(0)$ . Коэффициенты  $\beta_{lk}$  ( $l \in L = \{1, 2, \dots, l\}, k \in K = \{1, 2, \dots, l\}$ ) определяются в ходе преобразования существенного графа в граф управлений. Коэффициенты  $\beta_{lk}$  могут быть также найдены из системы алгебраических уравнений

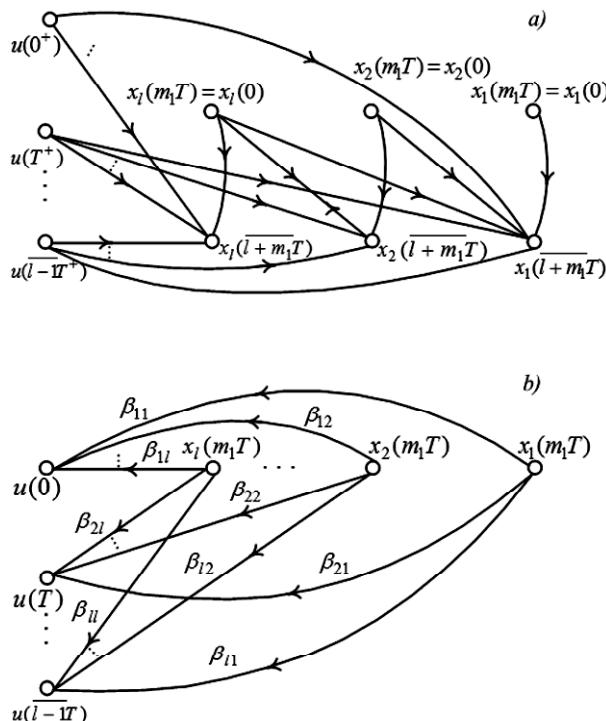


Рисунок 4 – Существенный график переменных состояния (а), график управлений (б)

(17). Закон управления в функции текущих состояний объекта можно получить следующим образом. Инвертируем передачи  $x_i(m_1T)/x_j(\overline{l+m_1}T)$  и проведем соответствующие преобразования существенного графа, в результате получим граф начального состояния (рис.5а), откуда можно записать:

$$\left. \begin{array}{l} r_{11}u(0) + r_{12}u(T) + \dots + r_{1l}u(\overline{l-1T}) = x_1(0) \\ r_{21}u(0) + r_{22}u(T) + \dots + r_{2l}u(\overline{l-1T}) = x_2(0) \\ \dots \\ r_{l1}u(0) + r_{l2}u(T) + \dots + r_{ll}u(\overline{l-1T}) = x_l(0) \end{array} \right\}. \quad (19)$$

Решим эту систему линейных алгебраических уравнений или, что то же самое, преобразуем граф (рис. 5а) таким образом, чтобы выразить первое управляемое воздействие  $u(0)$  через  $\vec{x}(0)$ . Знания значения  $u(0)$  достаточно, чтобы перевести объект из начального состояния  $\vec{x}(m_1T) = \vec{x}(0)$  в следующее состояние  $\vec{x}(\overline{m_1+1}T)$ . Приняв полученное состояние  $\vec{x}(\overline{m_1+1}T)$  за новое начальное состояние системы, повторим решение задачи, т.е. по виду существенного графа для интервала  $(\overline{m_1+1}T; \overline{l+m_1}T)$  определим значения второго управляемого воздействия и т.д.

Закон управления при таком подходе представляет собой первое соотношение из системы (18), т.е.

$$u(0) = \beta_{11}x_1(0) + \beta_{12}x_2(0) + \dots + \beta_{1l}x_l(0). \quad (20)$$

Закон управления (20) может быть практически реализован в виде оператора обратной связи (рис.5б):

$$B = \beta_{11} + \beta_{12}p + \dots + \beta_{1l}p^l. \quad (21)$$

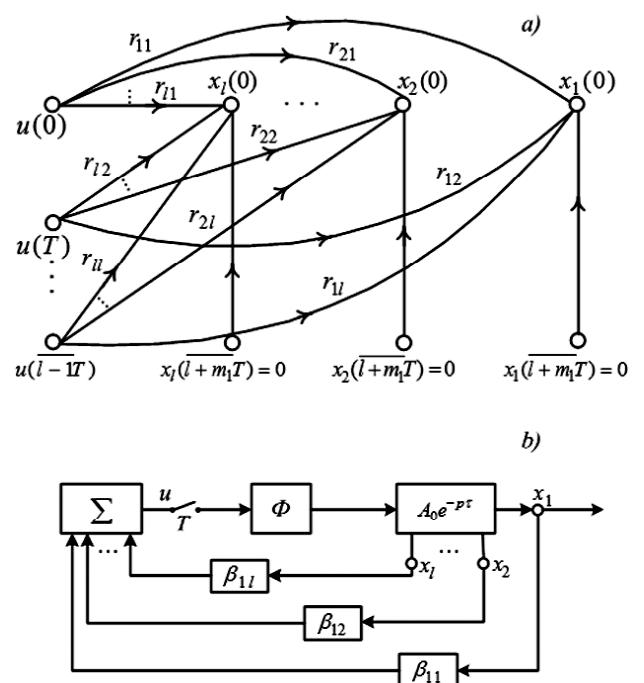


Рисунок 5 – ГПС (а), схема синтезированной системы (б)

### 3 ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В качестве примера был произведен расчет оптимальных регуляторов для САР Наиманского узла гидротехнических сооружений (рис. 6а), блок-схема которой представлена в виде трехмерной дискретной системы (рис. 6б). ИЭ<sub>1</sub>, ИЭ<sub>2</sub> работают в синхронно-синфазном режиме с периодом  $T=900$  сек. Передаточная функция многомерного объекта задана в виде:

$$\tilde{A}_0(p) = \begin{bmatrix} 0,0484e^{-1,5pT} & 0,872e^{-1,5pT} \\ p(858,6p+1) & p(1554,6p+1) \\ 0,0856e^{-1,5pT} & 0,0305e^{-1,5pT} \\ p(121,3p+1)^2 & p(616,5p+1) \\ 0,0912e^{-1,5pT} & 0,664e^{-1,5pT} \\ p(768,8p+1) & p(831,5p+1) \end{bmatrix}.$$

Однаковые запаздывания в отдельных каналах передач обусловлены соответствующим расположением измерительных колодцев в каждом из каналов.

Требовалось найти передаточные функции цифровых регуляторов  $D^1(z), D^2(z)$ , обеспечивающие на выходах системы  $y^1, y^2$  апериодический характер переходных процессов, конечную и минимальную их длительность при условии компенсации вредного влияния запаздывания.

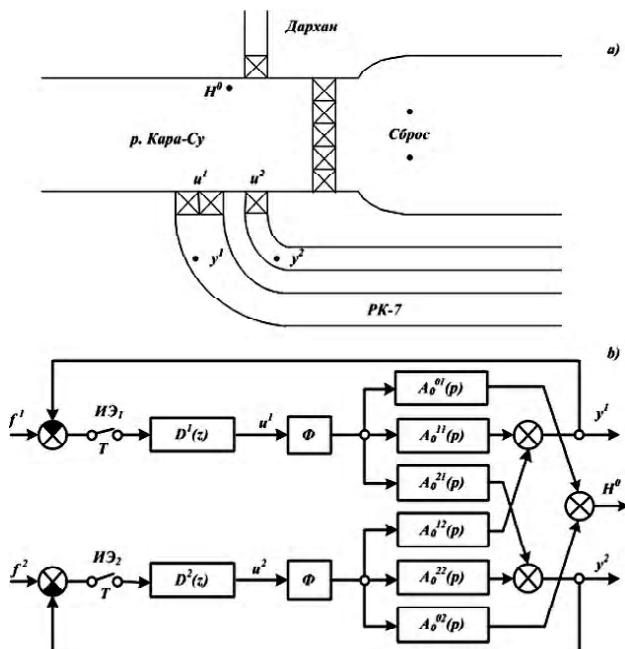


Рисунок 6 – Наиманский узел гидротехнических сооружений (а), блок-схема системы (б)

Таблица 1 – Численные значения выходных функций

$nT$	$0,5T$	$T$	$1,5T$	$2T$	$2,5T$	$3T$	$3,5T$	$4T$
$y^1$	0	0	0	0,0348	0,0615	0,489	1	1
$y^2$	0	0	0	0,182	0,612	0,932	1	1
$H^0$	0	0	0	-0,00038	-0,00051	0,0004	0,00087	0,00046

### 4 РЕЗУЛЬТАТЫ

В результате решения поставленной задачи методом динамических графовых моделей были найдены коэффициенты усиления и импульсные передаточные функции цифровых регуляторов  $D^1(z), D^2(z)$ :

$$k_0^1 = \frac{u^1(0^+)}{f^1(0) - y^1(0)} = 0,0348; k_0^2 = -0,0246;$$

$$k_1^1 = -0,0254; k_1^2 = 0,0288.$$

$$D^1(z) = \frac{0,0348 - 0,0254z^{-1}}{1 + z^{-1} + 0,965z^{-2} + 0,511z^{-3}};$$

$$D^2(z) = \frac{-0,0246 + 0,0288z^{-1}}{1 + z^{-1} + 0,817z^{-2} + 0,0684z^{-3}}.$$

Полученные передаточные функции позволили получить на выходах  $y^1, y^2$  процессы, заканчивающиеся за два периода прерывания, но сдвинутые относительно оси абсцисс на время запаздывания, равное  $1,5T$  (табл. 1, рис. 7).

### 5 ОБСУЖДЕНИЕ

Построение динамических графовых моделей основывается на разделении длительности основного периода прерывания на ряд интервалов в соответствии с частотами и фазами работы отдельных прерывателей. Это определяет количество, структуру и связи между подграфами, соответствующими отдельным интервалам работы системы. Динамическая графовая модель системы, представляющая собой объединение подграфов, позволяет полностью описать поведение системы на любом промежутке времени.

Задача синтеза в дискретной системе сводится к определению последовательности управляющих воздействий или матрицы обратной связи, исходя из критерия минимума числа шагов, необходимых для перевода

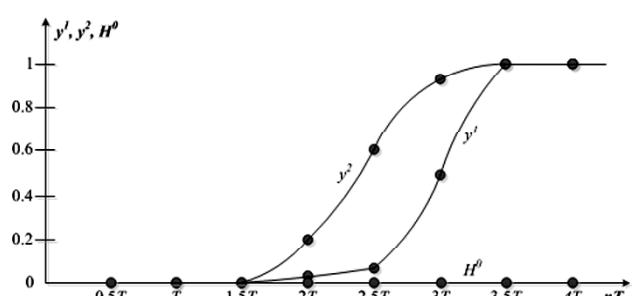


Рисунок 7 – Графики процессов на выходе системы

объекта из заданной начальной точки ограниченного пространства состояния в заданную требуемую область того же пространства. Минимальное необходимое число шагов управления определяет временной интервал, на котором должен быть «развернут» граф. Исключение промежуточных узлов графа позволяет получить рекуррентное матричное уравнение, из которого могут быть получены значения управляющих сигналов или элементов матрицы обратной связи. Этот же граф позволяет исследовать свойства управляемости и наблюдаемости при синтезированном дискретном управлении, мультиустойчивости объекта на временном интервале, возможные пределы быстродействия системы и точности в установившемся режиме.

## ВЫВОДЫ

В работе на базе динамических графов решена задача структурного синтеза регуляторов дискретных систем управления с запаздыванием. Показано, что применение метода динамических графов позволяет легко справляться с таким фактором сложности моделирования систем управления как запаздывание. Наличие инерционности и запаздывания лишь упрощает структуру графа, так как обрачивается исключением соответствующих ветвей.

Научная новизна результатов заключается в дальнейшем развитии метода динамических графов, в разработке алгоритмов синтеза цифровых регуляторов на основе динамических графовых моделей и их модификации – графов переменных состояния. Графовые модели дают возможность рассчитать динамику системы по всем интересующим координатам, синтезировать законы управления по выбранным критериям оптимальности (быстроходействия, минимизации ошибки рассогласования, экономичности и др.), так как максимально близко могут учитывать характеристики и свойства реальных объектов управления.

Практическая значимость заключается в решении конкретной задачи расчета оптимальных регуляторов для системы автоматического регулирования Наиманского узла гидротехнических сооружений.

Предлагаемый в работе подход может быть применен и для решения задачи синтеза дискретных систем с переменной частотой прерывания, с кратными синхронизированными и несинхронизированными частотами прерывания, систем с модуляцией импульсов по длительности, частоте, систем с конечной длительностью импульсов и др.

Кадирова Д. Р.<sup>1</sup>, Кадирова А. А.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Канд. техн. наук, доцент кафедри «Теоретична електротехніка й електронні технології» Ташкентського державного технічного університету, Ташкент, Узбекистан

<sup>2</sup>Канд. техн. наук, зам. директора Міжгалузевого центру стратегічних інновацій і інформатизації, Ташкент, Узбекистан

## СТРУКТУРНИЙ СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРІВ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

У статті розглядається методика розрахунку цифрових регуляторів дискретних систем керування за допомогою динамічних графових моделей процесів. Пропонований метод моделювання дозволяє знайти шляхи для вирішення задач синтезу дискретних систем різної складності: одномірних і багатомірних, стаціонарних і нестаціонарних, з нестандартним режимом роботи імпульсних елементів та ін. Вирішення задач аналізу і синтезу складних систем керування класичними методами виявляється часто неможливим через обчислювальні труднощі. Застосування графових моделей дозволяє виконати чітку і строгу формалізацію й автоматизацію обчислювальних процедур. Використовується фундаментальна властивість дискретних систем, а саме, здатність до природної декомпозиції і структуризації. Будь-які дискретні елементи у складі систем керування розглядаються не тільки як джерела дискретизації сигналів, але і як джерела

## БЛАГОДАРНОСТИ

Робота выполнена в рамках госбюджетной научно-исследовательской темы Ташкентского государственного технического университета «Развитие общей теории дискретных динамических и логико-динамических систем с ЭВМ в контуре управления» (номер государственной регистрации Ф-4-47).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ту Ю. Современная теория управления / Ю. Ту ; пер. с англ. под ред. В. В. Соловникова. – М. : Машиностроение, 1971. – 472 с.
2. Кузин Л. Т. Расчет и проектирование дискретных систем управления / Л. Т. Кузин. – М. : Машгиз, 1962. – 684 с.
3. Маковский Э. Э. Автоматизация гидротехнических сооружений в системах каскадного регулирования расходов воды / Э. Э. Маковский. – Фрунзе : Илим, 1972. – 302 с.
4. Гурецкий Х. Анализ и синтез систем управления с запаздыванием / Х. Гурецкий. – М. : Машиностроение, 1974. – 328 с.
5. Кадыров А. А. Динамические графовые модели в системах автоматического и автоматизированного управления / А. А. Кадыров. – Ташкент : Фан, 1984. – 238 с.
6. Мирошник И. В. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими объектами / И. В. Мирошник, В. О. Никифоров, А. Л. Фрадков. – СПб. : Наука, 2000. – 549 с.
7. Пыркин А. А. Адаптивный алгоритм компенсации параметрически неопределенного смещенного гармонического возмущения для линейного объекта с запаздыванием в канале управления / А. А. Пыркин // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 8. – С. 62–78.
8. Лапето А. В. Анализ методов синтеза систем автоматического управления с запаздыванием / А. В. Лапето // Труды БГТУ. – 2011. – № 6. – С. 78–80. – (Серия «Физ.-мат. науки и информатика»).
9. Фомин В. Н. Методы управления линейными дискретными объектами / В. Н. Фомин. – Л. : ЛГУ, 1985. – 336 с.
10. Волгин Л.Н. Оптимальное дискретное управление динамическими системами / Л. Н. Волгин. – М. : Наука, 1986. – 239 с.
11. Матросов В. М. Нелинейная теория управления: динамика, управление, оптимизация / Под ред. В. М. Матросова, С. Н. Васильева, А. И. Москаленко. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 352 с.
12. Hou L. Unifying theory for stability of continuous, discontinuous, and discrete-time dynamical systems / L. Hou, A. N. Michel // Nonlinear Analysis : Hybrid Systems. – 2007. – Vol. 1, № 2. – P. 154–172.
13. Goebel R. Hybrid Dynamical Systems / R. Goebel, R. G. Sanfelice, A. R. Teel. – Princeton University Press, 2012. – 227 p.
14. Control and Estimation of Hybrid Systems with Mathematical Optimization : thesis ... doctor sc. techn. / D. Mignone. – Zurich : the Swiss Federal Institute of Technology (ETH), 2002. – 320 p.
15. Кадирова А. А. Методы моделирования и исследования нелинейных и логико-динамических систем управления / А. А. Кадирова. – Ташкент : Янги аср авлоди, 2010. – 186 с.

Статья поступила в редакцию 16.06.2016.

После доработки 03.07.2016.

дискретизації структури системи. Запропонований метод дозволяє синтезувати закони керування за обрамами критеріями оптимальності і максимально близько враховувати характеристики і властивості реальних об'єктів керування.

**Ключові слова:** дискретна система керування, структурний синтез, цифровий регулятор, запізнювання, динамічна графова модель.

Kadirova D. R.<sup>1</sup>, Kadirova A. A.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>PhD, Associate Professor of Theoretical Electrical Engineering and Electronic Technologies Department, Tashkent State Technical University, Tashkent, Uzbekistan

<sup>2</sup>PhD, Deputy Director of Center for Strategic Innovations and Informatization, Tashkent, Uzbekistan

### STRUCTURAL SYNTHESIS OF DISCRETE CONTROL SYSTEMS CONTROLLERS

The discrete digital controllers reckoning technique is the subject of this article with the aid of processes dynamic graph models. The proposed modeling technique allows to determine the ways for tasks solutions in terms of discrete systems analysis and synthesis of various complication: one-dimensional and multidimensional, steady and unstable, with the pulse elements abnormal operating mode and others. An often complex control systems analysis and synthesis task solution, via classical approach comes out to be insolvent, because of the computational problems. The application of graph models allows to perform clear and strict characterization and computer procedures automation. Here is useful the discrete systems fundamental property, and in particular, the ability for intrinsic decomposition and structurization. Any discrete elements of control system we consider not only as sources of the signal discretization, but also as discretization sources of the system structure. Suggested technique allows to synthesize control laws to be constructed with the respect to the criterions of optimality drawn as well as at the most close to be based on characteristic properties and real-world control objects features.

**Keywords:** discrete system, structure synthesis, digital controller, delay, dynamical graph model.

### REFERENCES

1. Tu Ju.; per. s angl. pod red. V. V. Solodovnikova. Sovremennaja teoriya upravlenija. Moscow, Mashinostroenie, 1971, 472 p.
2. Kuzin L. T. Raschet i proektirovanie diskretnykh sistem upravlenija. Moscow, Mashgiz, 1962, 684 p.
3. Makovskij Je. Je. Avtomatizacija gidrotehnicheskikh sooruzhenij v sistemakh kaskadnogo regulirovaniya rashodov vody. Frunze, Ilim, 1972, 302 p.
4. Gureckij H. Analiz i sintez sistem upravlenija s zapazdyvaniem. Moscow, Mashinostroenie, 1974, 328 p.
5. Kadirov A. A. Dinamicheskie grafovye modeli v sistemah avtomaticheskogo i avtomatizirovannogo upravlenija. Tashkent, Fan, 1984, 238 p.
6. Miroshnik I. V., Nikiforov V. O., Fradkov A. L. Nelinejnoe i adaptivnoe upravlenie slozhnymi dinamicheskimi ob'ektami. Sankt-Peterburg, Nauka, 2000, 549 p.
7. Pyrkin A. A. Adaptivnyj algoritm kompensacii parametricheski neopredeljonnogo smeshhennogo garmonicheskogo vozrushhenija dlja linejnogo ob'ekta s zapazdyvaniem v kanale upravlenija, *Avtomatika i telemehanika*, 2010, No. 8, pp. 62–78.
8. Lapeto A. V. Analiz metodov sinteza sistem avtomaticheskogo upravlenija s zapazdyvaniem, *Trudy BGTU*, 2011, No. 6, pp. 78–80. – (Serija «Fiz.-mat. nauki i informatika»).
9. Fomin V. N. Metody upravlenija linejnymi diskretnymi ob'ektami. Leningrad, LGU, 1985, 336 p.
10. Volgin L. N. Optimal'noe diskretnoe upravlenie dinamicheskimi sistemami. Moscow, Nauka, 1986, 239 p.
11. Matrosov V. M., Vasil'ev S. N., Moskalenko A. I. Nelinejnaja teoriya upravlenija: dinamika, upravlenie, optimizacija. Moscow, FIZMATLIT, 2003, 352 p.
12. Hou L., Michel A. N. Unifying theory for stability of continuous, discontinuous, and discrete-time dynamical systems, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2007, Vol. 1, No. 2, pp. 154–172.
13. Goebel R., Sanfelice R. G., Teel A. R. Hybrid Dynamical Systems. PrincetonUniversity Press, 2012, 227 p.
14. Mignone D. Control and Estimation of Hybrid Systems with Mathematical Optimization : thesis ... doctor sc. techn. Zurich: the Swiss Federal Institute of Technology (ETH), 2002, 320 p.
15. Kadirova A. A. Metody modelirovaniya i issledovaniya nelinejnyh i logiko-dinamicheskikh sistem upravlenija. Tashkent, Jangi asr avlodji, 2010, 186 p.

<sup>1</sup>PhD, Associate Professor, Associate Professor of Department of Information Technology and Systems, National Metallurgical Academy of Ukraine (NMetAU), Dnipro, Ukraine

<sup>2</sup>Dr.Sc., Professor, Chief of Department of Information Technology and Systems, National Metallurgical Academy of Ukraine (NMetAU), Dnipro, Ukraine

## MULTI-MODELS IDENTIFICATION METHODS COMPARISON IN THE NON-LINEAR DYNAMIC SYSTEM IDENTIFICATION TASK

In this article a couple of identification methods for non-linear (possibly chaotic) dynamic systems are under consideration. Advantages and drawbacks of existent methods are mentioned. All methods under consideration make use a number of models. Different tactics for the models parameter movement for identification task solving are proposed. The simplest tactic uses models with fixed parameters. This method have simple realization, provide best identification speed and worst accuracy. Method with band-limited models allows us achieve better accuracy due to each model moving to its local extremum, but suffers to high-frequency oscillation, due to ignorance of the identification system dynamic itself. Approach with models, which movement simulates body movement under external forces and viscous friction demonstrates minimal identification errors among with significant speed. Identification process simulations are conducted and conclusion are made. According to simulation results advantages are highlighted and drawbacks are studied. Conclusions allows to make correct choice in identification method selection task. Also the results allows us to correctly chose some parameters on the identification system.

**Keywords:** non-linear dynamic system identification, multi-model identification methods, models ensemble, simulation, extemum estimation.

### NOMENCLATURE

$n$  is number of models (not counting fake models);  
 $p$  is parameter value in general;  
 $p_o$  is parameter value for object  
 $p_{mi}$  is parameter value for model number  $i$   
 $p_0$  is initial object parameter value of the non-steady case;  
 $p_{mi,0}$  is initial parameter value of the model number  $i$ ;  
 $p_c$  is parameter value of the current (or “central”) model;  
 $p_l$  is parameter value of the “left” model;  
 $p_r$  is parameter value of the “right” model;  
 $\tilde{p}$  is relative parameter value;  
 $p_{ge}$  is parameter value, estimated by the global COG approach;  
 $p_{le}$  is parameter value, estimated by the local COG approach;  
 $p_{ee}$  is parameter value, estimated by the second-order approximation for the best point;  
 $x$  is object or model output;  
 $q$  is criterion value;  
 $q_o$  is criterion value for the object;  
 $q_{mi}$  is criterion value for the model number  $i$ ;  
 $q_e$  is criterion scale coefficient;  
 $F$  is quality function in general;  
 $\tilde{F}$  is relative quality function;  
 $e$  is identification error in general;  
 $e_{ge}$  is identification error for the global COG approach;  
 $e_{le}$  is identification error for the local COG approach;  
 $e_{ee}$  is identification error for the second-order approximation for the best point;  
 $a_q$  is coefficient for linear part in the criterion model;  
 $a_{qm}$  is coefficient for non-linear part;  
 $a_1$  is first coefficient in parabolic approximation;  
 $a_2$  is second coefficient in parabolic approximation;  
 $\bar{U}_p$  is parameter amplitude;  
 $\omega_p$  is parameter frequency;  
 $f_c$  is attracting “force” to the center of band;

$f_n$  is “force” due to interacting with neighbor models;  
 $f_e$  is attracting “force” to the estimated local extremum;  
 $f_t$  is total “force”;  
 $k_c$  is coefficient for the  $f_c$ ;  
 $k_n$  is coefficient for the  $f_n$ ;  
 $k_e$  is coefficient for the  $f_e$ ;  
 $v_f$  is coefficient for the “viscous” resistance.

### INTRODUCTION

Identification of the complex non-linear dynamic systems, in particular, systems with chaotic dynamic [1], systems with dry friction in most cases is a formidable and non-trivial task. Even simple nonlinear systems may demonstrate complex, even chaotic behavior [2]. Some known methods can be applied in this area, but, obviously, there is no common solution due to non-constrained properties of such systems. Existent identification methods mainly use one model or pair of models, which significantly decreases identification speed and increases probability of mis-identification due to possible multi-extremum quality function shape.

So, the actual problem is to create new approaches to nonlinear (possibly chaotic) dynamic systems identification, which uses advantages of multi-model approach, investigate its properties, compare these methods under same conditions to provide background to select the proper one.

### 1 PROBLEM STATEMENT

Let's consider an object under identification with a parameter  $p_o(t)$ , and a set of models, with parameters  $p_{mi}(t)$ ,  $i=0\dots n-1$ . We observe output signal  $x(t)$  both from object (with particular measurement error) and from every of models. According to selected identification criterion, we measure or calculate corresponding criterions:  $q_o(t)$  and  $q_{mi}(t)$ . Then, this signals from models compared (according to given scale  $q_\gamma$ ) with object to form quality functions  $F(t)$ .

The task of identification in this condition is to find one model with corresponding parameter value  $p_e$ , which maximizes quality function. Moreover, all models from the

set must provide behavior (in the sense of  $p_{mi}(t)$  dynamics), which provide fast and precise identification in the given conditions. To achieve this task, models may exchange among itself information about current parameter value and quality function.

## 2 REVIEW OF THE LITERATURE

There is a great amount of developed method to solve identification task. First of all, we must mention well-known classical methods [3, 4]. This method have outstanding mathematical background, but in the case of complex (and chaotic) dynamic systems became inapplicable, as we cannot provide the required information about objects and satisfy numerous limitations.

Some modern approaches provide solution for more complex task – structural identification [5]. But, after investigation, this methods appears to limiting to the supported systems set, and appears vulnerable to the measurement noise.

Particularly to the chaotic systems, there exists a couple of method, based on the phenomena of the chaotic synchronization [6]. This methods prove its ability to deal with chaotic systems, but also have some drawbacks. First of all, synchronization is possible not only for one-to-one parameter confidence, but for other conditions due to non-linear object properties.

One of the most useful adaptive-searching identification methods [8], in case of adequate criterion is provided [9], can be successfully used for this purpose. But, in general, this methods also have some drawbacks. First of all, this methods spend too much time to locate criterion extremum. Other essential drawback – measurement near one point decreases probability of identification in case of multi-extremum criterion shape. Some methods [10, 11] demonstrates applicability of multi-model approaches to non-linear and chaotic system identification, but further investigations in this area are required.

## 3 MATERIALS AND METHODS

To receive identification simulation results, which is independent of particular dynamic system properties, the model of identification error (or the identification criterion) is required. One of the reasons of accuracy loss assumed to be criterion non-symmetrical form. So, the model must have a uniformly controlled part, which describes such phenomena. In this paper one of the simple representation will be used:

$$q(p_o, p_{mi}) = a_q(p_o - p_{mi}) + a_{qm}|p_o - p_{mi}|, \quad (1)$$

where  $p$  – parameter,  $q$  – identification quality criterion,  $a_q$  – sensitivity coefficient,  $a_{qm}$  – coefficient for non-linear part. Index “o” designates object under identification, and index “mi” belongs to model number  $i$ . Alternative form for (1), with quadratic nonlinear part, appears inadequate in the situation with large parameter range.

Quality function  $F$  will be represented by this way:

$$F(q_{mi}) = \exp\left(-\frac{q_{mi}^2}{q_\gamma^2}\right), \quad (2)$$

where  $q_\gamma$  – coefficient, which defines sensitivity scale. This definition inapplicable in real identification tasks due to

ignorance object identification quality. In task under consideration, we move coordinate system to achieve  $q_o = 0$ . This allows us to control and investigate asymmetrical properties of the criterion uniformly in any parameter space part. Usage of definitions (1) and (2) ignores real system dynamic, interaction between object and model outputs, and make attempt to describe all object properties by 2 coefficients. This simplification give us opportunity to determine common properties of identification system itself. We assume, that dynamic properties on identification system is much “slower”, then in non-linear system under consideration. In real systems this requirement is met in most cases.

One of the tasks, which appears while using multiple models, is the method to convert models parameter and criterion values to the final parameter value. The first approach consist in fuzzy logic “centre of gravity” (COG) approach:

$$p_{ge} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} F_{mi} p_{mi}}{\sum_{i=0}^{n-1} F_{mi}}. \quad (3)$$

One obvious drawback is non-uniform usage of models at bounds, namely number 0 and number ( $n-1$ ). As a countermeasure of we add 2 fake fixed “out of band” models. This fake models will be designated by indexes “ll” and “rr”. Initial parameter values distribution on working area (and some behind) is uniform. Identification criterion for fake models assumed to be zero.

Calculation of  $p_{ge}$  value is quite simple, but in case of multi-extremum criterion shape, or relatively large  $q_\gamma$  value, the influence of the models, which is far from real extremum, may be significant. To drop such influence, we define value of similar value  $p_{le}$ , which is bound to better point. Let  $c$  (center) – index of model with maximum  $F$ . And  $l = c-1$ ,  $r = c+1$ . Thus:

$$p_{le} = \frac{F_l p_l + F_c p_c + F_r p_r}{F_l + F_c + F_r}. \quad (4)$$

Another way to determine extremum point in the range of 3 adjutant models is to approximate  $F(p)$  by parabolic function. To simplify calculations, we shift the origin to the point  $(p_c, F_c)$ :  $\tilde{p} = p - p_c$ ,  $\tilde{F} = F - F_c$ . Using this definitions, we receive:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a_2 \tilde{p}_l^2 + a_1 \tilde{p}_l = \tilde{F}_l, \\ a_2 \tilde{p}_r^2 + a_1 \tilde{p}_r = \tilde{F}_r \end{cases}, \\ & a_1 = \frac{\tilde{F}_r \tilde{p}_l^2 - \tilde{F}_l \tilde{p}_r^2}{\tilde{p}_l^2 \tilde{p}_r + \tilde{p}_l \tilde{p}_r^2}, \\ & a_2 = \frac{\tilde{F}_r \tilde{p}_l - \tilde{F}_l \tilde{p}_r}{\tilde{p}_l^2 \tilde{p}_r + \tilde{p}_l \tilde{p}_r^2}, \\ & p_e = p_c - \frac{a_1}{2a_2}. \end{aligned} \quad (5)$$

This approximation is adequate only in regions with essential changes of quality function. Out of with regions equation (5) give results far from considered points triplet. To prevent displacement of  $p_e$  out of band, defined by current 3 models, limit  $p_e$  value to  $(p_l, p_r)$ . For practical reason, limitation may be stronger. If calculated by (5) extremum point is near to  $p_l$  or  $p_r$ , then central point unlikely to be the best.

The value of  $p_e$  where index “c” means the best model, we define as  $p_{ee}$ . During simulation of identification process, we will observe  $p_{ge}$ ,  $p_{le}$  and  $p_{ee}$ , along with corresponding identification errors:

$$e_{ge} = p_{ge} - p_o, e_{le} = p_{le} - p_o, e_{ee} = p_{ee} - p_o. \quad (6)$$

The identification quality will be estimated as standard deviation of identification error, measured at sufficiently large simulation time  $T$ .

#### 4 EXPERIMENTS

The identification process simulation was conducted by developed simulation program “qontrol”. Typical graphical representation of this program is represented in fig. 1.

During simulation process, criterion approximation, given by (1), was used instead of real or simulated dynamic objects. To check ability to identify non-steady systems, object parameter  $p_o$  was given by one of 2 ways:

$$p(t) = p_0 + U_p \sin(\omega_p t), \quad (7)$$

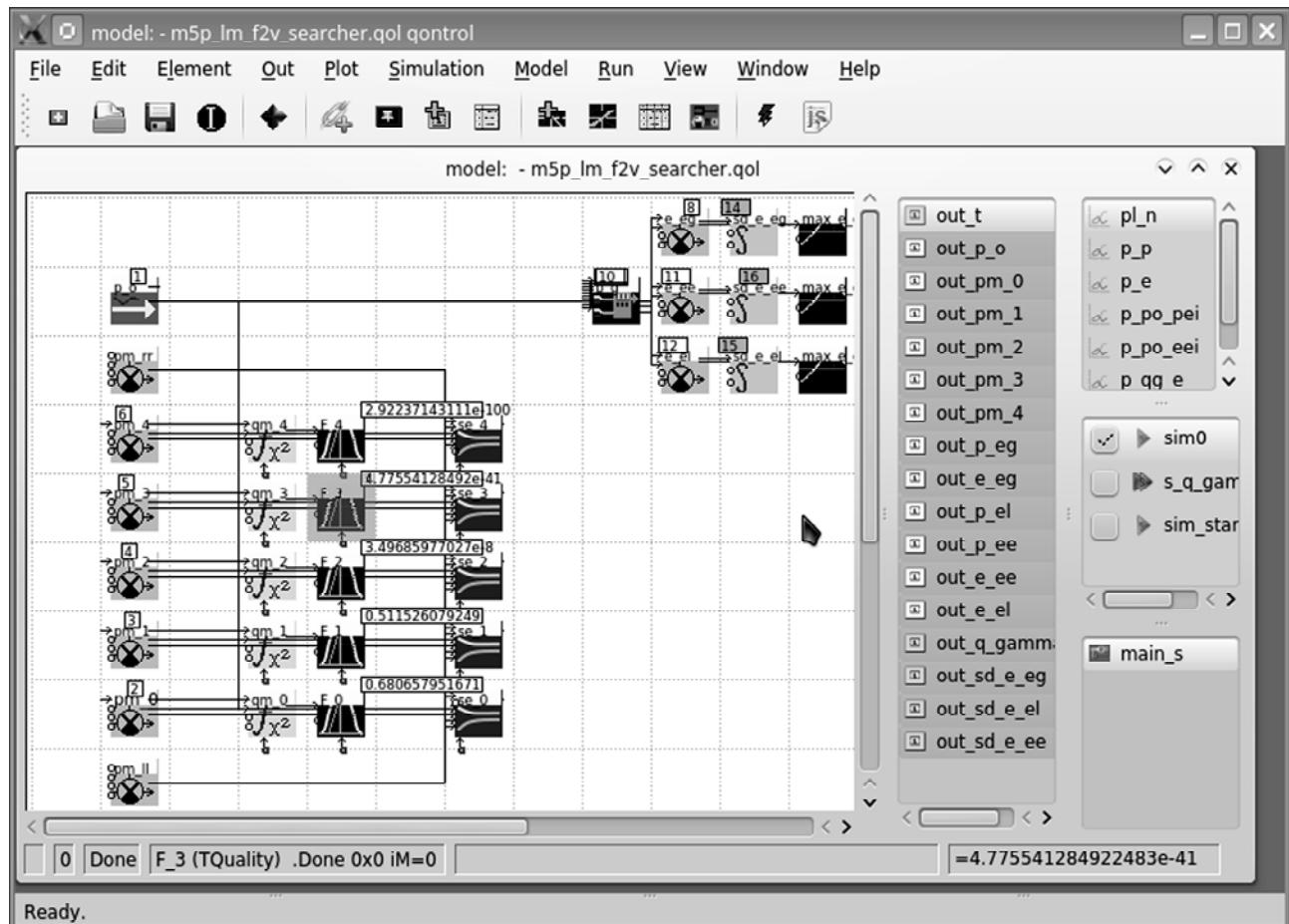


Figure 1 – “Qontrol” program main window

$$p(t) = p_0 + U_p \text{sign} \sin(\omega_p t), \quad (8)$$

where coefficients were set to values, which allows to test different modes:  $U_p = 40$ ,  $\omega_p = 1.1$ ,  $p_0 = 45$ . Working parameter range was given as  $(0, 100)$ . Initial values of models parameter:  $p_{ll} = -10$ ,  $p_{m0,0} = 10$ , ...,  $p_{m4,0} = 90$ ,  $p_{rr} = 110$ . When the parameter changes is defined by the equation (7), it give us possibility to examine full parameter range covering. Otherwise, if the parameter value is given by the equation (8), dynamic properties and identification stability can be under investigation.

The values of other parameters was given as:  $a_{qm} = 5$ ,  $a_{q_m} = 0.5$ . The value of  $q_\gamma$  was changed in range [2;140]. Standard deviations of identification errors was measured, and plots are provided for better values.

To satisfy this paper goals, three different approaches to locate quality function extremum, and, hence, the value of the parameter under identification is considered. First of all, a set of model with fixed parameters was under simulation. The second method allows every model to move in fixed band in the parameter space, and each model every simulation step adjust own parameter to the value, given by (5). The third approach also allows every model to move, but the current parameter value is given by the equation, which simulates body dynamic under action of some forces.

For every of approaches, the identification process simulation was held, and the plots with every model parameter, object parameter and identification errors values are provided. Moreover, the dependence of the RMS errors from the quality function scale coefficient is shown.

## 5 RESULTS

In fig. 2 represented simulation results for identification system with fixed models with  $n=5$  and  $q_\gamma=60$ . Object parameter behavior was given as (7) and (8). Fig. 3 represents identification errors.

Fig. 4 represents RMS identification error dependencies  $\bar{e}_{ge}$ ,  $\bar{e}_{le}$   $\bar{e}_{ee}$  from identification sensitivity scale  $q_\gamma$ .

To achieve better results, it's worth to allow model to change own parameter. The new parameter value  $p_e$  is given by (5). I.e. every model (except fake) takes in account not only own parameter and quality function, but the same of nearest neighbors. But, if we allow for all models to move freely, all models will fall in one small area, and not react to next parameter movement. To prevent this, we assign a non-intersecting bands for every model, which limits parameters movement. The simulation results are shown in fig. 5, 6, 7.

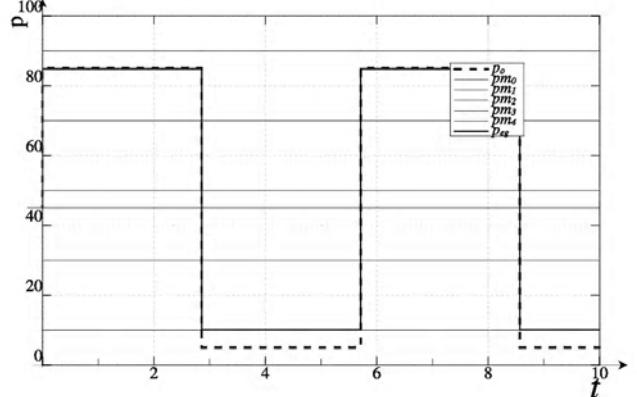
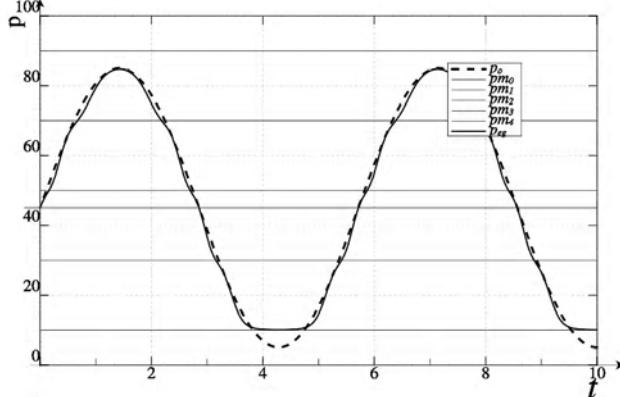


Figure 2 – Identification process with fixed models under conditions (7) and (8)

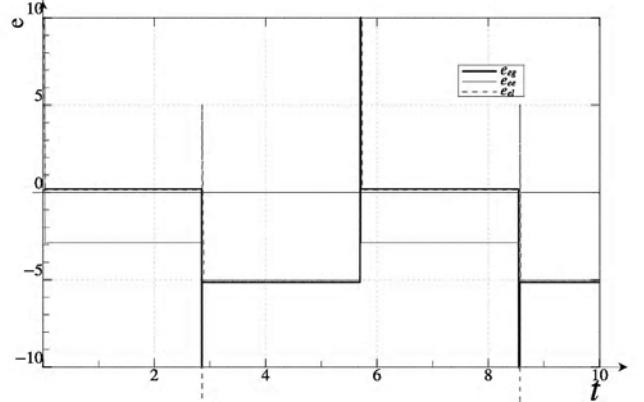
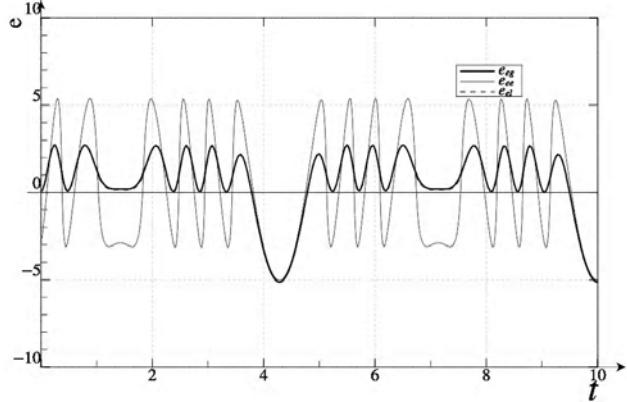


Figure 3 – The identification errors while identification with fixed models

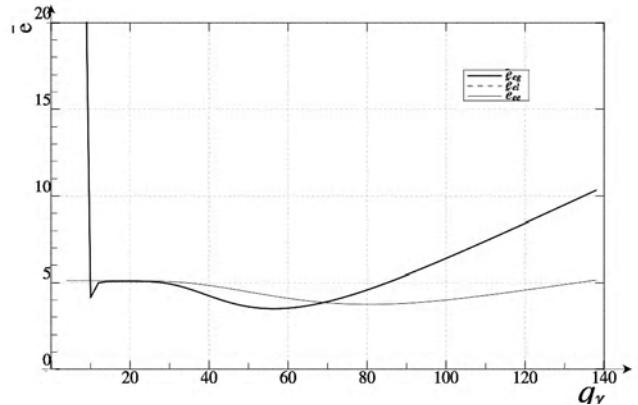
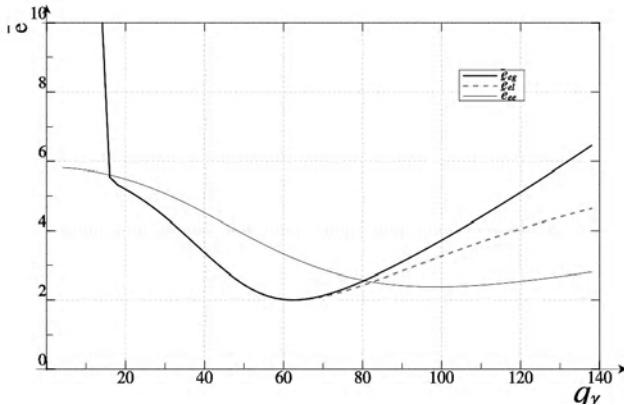


Figure 4 – RMS error dependencies from  $q_\gamma$  while identification with fixed models under conditions (7) and (8)

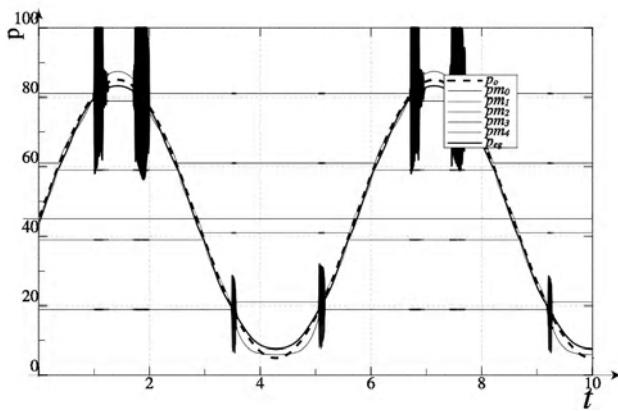


Figure 5 – Identification process with band-limited models under conditions (7) and (8)

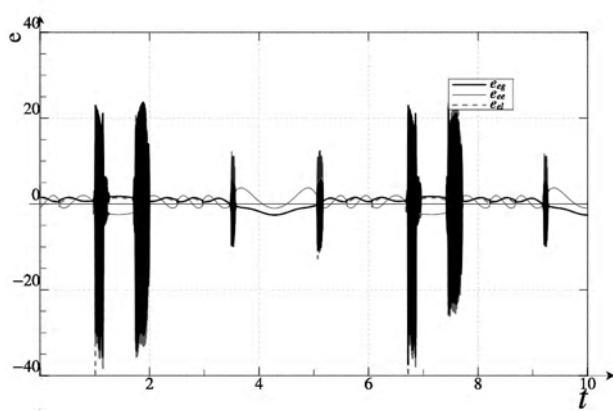
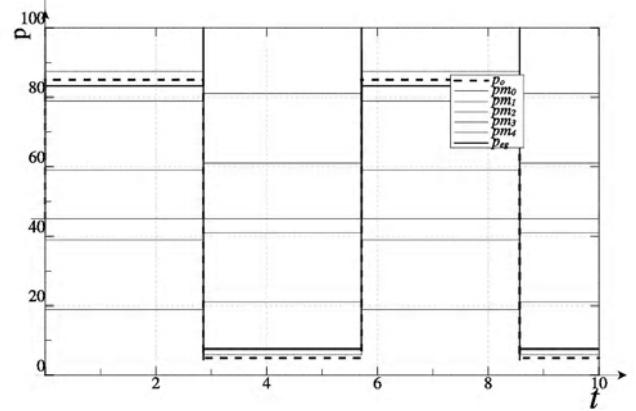
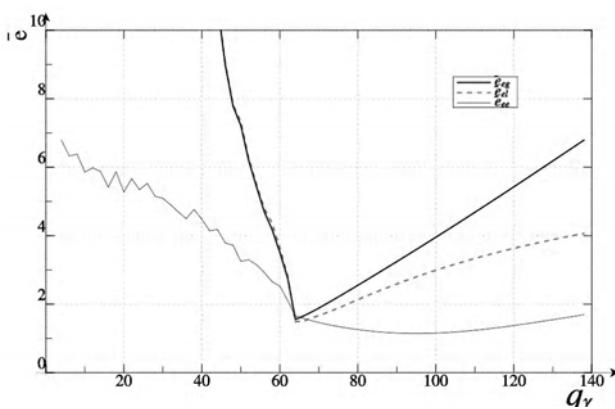
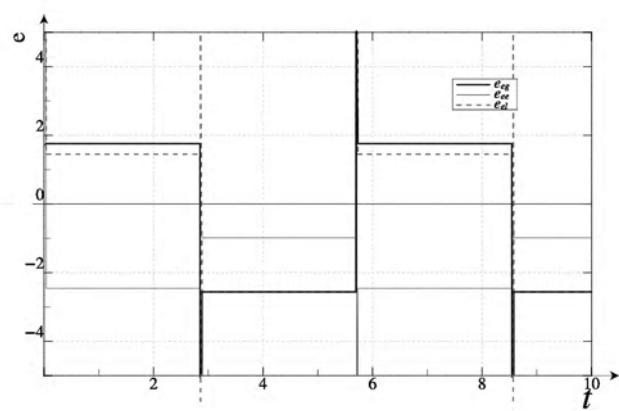


Figure 6 – The identification errors while identification with band-limited models

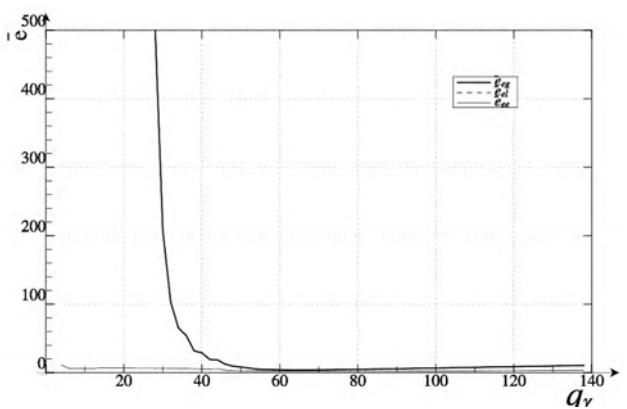
Figure 7 – RMS error dependencies from  $q_\gamma$  while identification with band-limited models under conditions (7) and (8)

To achieve better results, we can treat every real model as physical body under influence of different forces. We investigate the influence of given “forces”:

1.  $f_c(t) = -k_c(p_c - p_{c,0})$  – “the attraction force” to the initial parameter value for current model. The presence of this force does not allow all models to take the same values near the extremum and thus stop the search process. It also allows to quickly switch to the other models in the case of a rapid change in the object parameter.

2.  $f_n(t) = k_n(p_r - 2p_c + p_l)$  – “the force of interaction” with neighbours. It provides a more uniform distribution model parameters near the extreme.

3.  $f_e(t) = -k_e(p_c - p_e)$  – “the force of attraction” to the local calculated extremum, which is given by expression (5).



Additional forces may be added, for example, to rise strong barriers between models, to prevent parameter confinement in certain conditions.

Net force  $f_t(t) = f_c(t) + f_n(t) + f_e(t)$  may lead to model movement by different ways. In this paper the viscous approach is used:

$$\frac{dp_c}{dt} = v_f f_t(t), \quad (9)$$

where  $v_f$  – proportionality factor (value, inversely proportional to viscous friction coefficient).

The simulation results are shown in fig. 8, 9. Used parameters:  $k_c = 1$ ,  $k_n = 1$ ,  $k_e = 5$ ,  $v_f = 2$ .

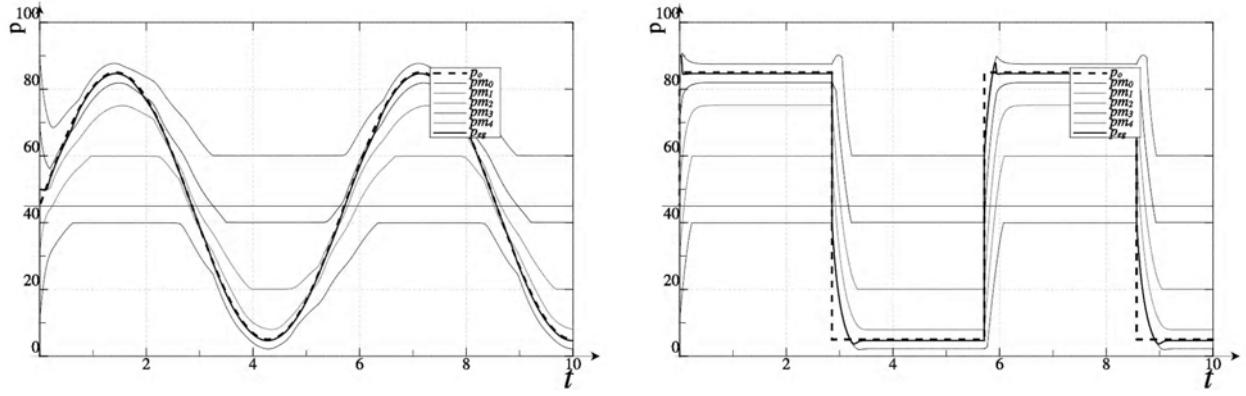


Figure 8 – Identification process with moving models (9) under conditions (7) and (8)

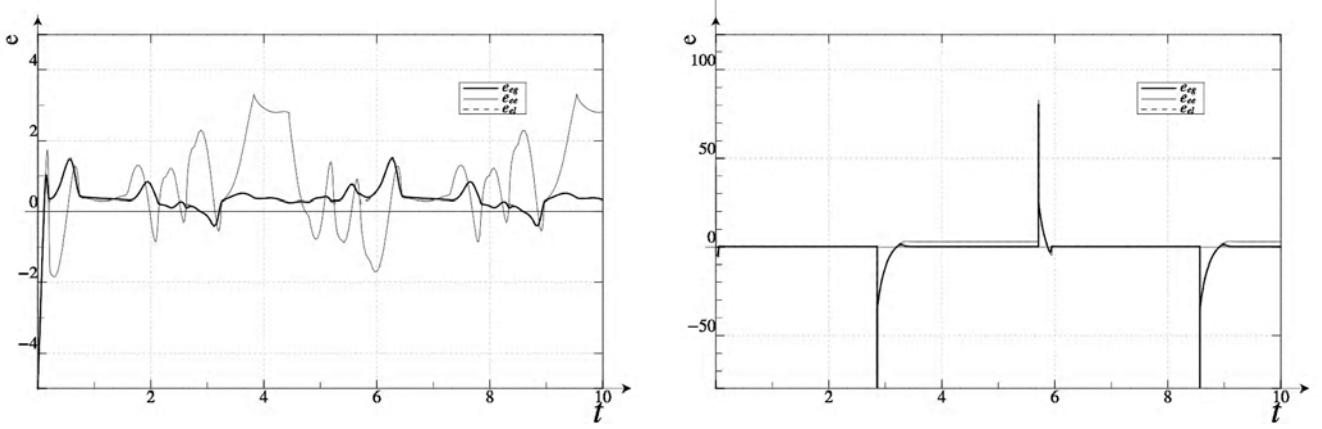


Figure 9 – The identification errors while identification with process with moving models (9) under conditions (7) and (8)

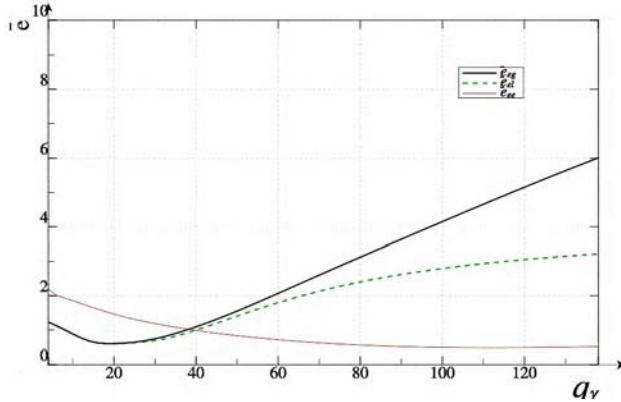


Figure 10 – RMS error dependencies from  $q_\gamma$  while identification with moving models (9) under conditions (7) and (8)

## 6 DISCUSSION

The identification error analyses for the approach with fixed models shows (fig. 3), that this approach demonstrates maximal identification speed, which is determined only by the object dynamic itself. In this environment there is no visible difference between  $p_{eq}$  and  $p_{el}$ . Surprisingly, the values of  $p_{ee}$  shows the worst results. Some of the possible reasons is considered in [12]. As predicted, error value is minimal near one of model parameters, and essentially increased near bounds. This approach demonstrates maximal identification speed, which is determined only by the object dynamic. In the current simulation conditions, identification

occurs nearly instantaneous. As a consequence, essential identification error is observed. Also results shows, that for every method of parameter estimation, an optimal  $q_\gamma$  value exists, and optimal  $q_\gamma$  value for  $\bar{e}_{ee}$  is essentially large, then for  $\bar{e}_{ge}$ ,  $\bar{e}_{le}$ .

The identification error analyses (fig. 7) for the approach with band-limited models shows, that, in general, this method leads to less errors under the same conditions, then method with fixed models. Moreover, due to moving parameters the are no “dead zones” near working range boundaries. One model is follows the object parameter in own band, and provides better identification results.

The error shapes shows one essential drawback for this method: near the bands boundaries the are fast switching oscillation. Switching from one active band to another occurs with the frequency, which is defined by the simulation time step. This behavior is due to the fact, that identification process is dynamical too, and we should not neglect its dynamic.

The fig. 7, especially its right part, show us this approach is much more sensible to correct values of the identification system parameters itself, in particular  $q_\gamma$ .

The simulation results for the approach (9) shows (fig. 8–10), that this method shows best results among approaches under consideration. At least 2 models follows the object parameter, that gives good accuracy. Other models moved to extremum too, but continues to “patrol” working range.

## CONCLUSIONS

In this paper an actual task for multi-model identifications system synthesis, analysis and defining condition for particular method selection is reached.

Results of identification process simulation allow us to make some conclusions:

- identification using models with fixed parameters, in spite of simplicity and speed, can not provide sufficient accuracy and full range covering;
- system with band-limited parameters gives better results, but suffer high frequency switching;
- system with models, which parameters displacement is described as body movement under forces gives best result;
- in conditions under consideration, there is no valuable difference between  $P_{eg}$  and  $P_{el}$ ,
- every approach under consideration have own optimal value for the  $q_\gamma$ .

The practical value of this work is to provide both fast and precise methods for complex dynamic system identification, by which modern technological systems is characterized. Also, the results of this paper gives background to choose correct method among considered.

## ACKNOWLEDGEMENTS

This research was held under the bounds of the state budget thematic “Research and processes simulation of

Гуда А. И.<sup>1</sup>, Михалев А. П.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры информационных технологий и систем Национальной Металлургической академии Украины, Дніпро, Україна

<sup>2</sup>Д-р техн. наук, профессор, зав. кафедры информационных технологий и систем Национальной Металлургической академии Украины, Дніпро, Україна

## СРАВНЕНИЕ МУЛЬТИМОДЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ ИДЕНТИФИКАЦИИ В ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В статье рассмотрено несколько методов идентификации для нелинейных (возможно хаотических) динамических систем. Преимущества и недостатки существующих методов упоминаются. Все методы используют множество моделей. Предлагаются различные тактики для движения параметров модели с целью решения задачи идентификации. Простейшая тактика использует модели с фиксированными параметрами. Этот метод имеет простую реализацию, обеспечивают наилучшую скорость идентификации и худшую точность. Метод с моделями с ограниченной полосой поиска позволяет добиться большей точности, благодаря использованию моделей, настраивающий свой параметр в значение локального максимума, но подвержена высокочастотным колебаниям из-за игнорирования динамики самой системы идентификации. Подход с моделями, чье движение имитирует движение тела под действием внешних сил и вязкого трения демонстрирует минимальные ошибки идентификации и значительную скорость. Проведено моделирования процессов идентификации и сделаны выводы. Согласно результатам моделирования, выделены преимущества и недостатки. Выводы позволяют сделать правильный выбор в задаче выбора способа идентификации. Кроме того, результаты позволяют правильно выбрать некоторые параметры в системе идентификации.

nonlinear dynamics formation of fractal structures functional coatings”, registration number DR 0110U003240.

## REFERENCES

1. Moon F. C. Chaotic vibrations. An introduction for applied scientists and engineers / F. C. Moon. – Weinheim : Wiley-VCH Verlag GmbH & Co, 2004 – 310 p.
2. Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах. Механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиофизических системах / В. С. Анищенко. – М. : ЛиброКом, 2009. – 320 с.
3. Eykhoff P. System Identification Parameter and State Estimation / P. Eykhoff. – Wiley-Interscience, 1974. – 555 p.
4. Ljung L. System Identification: Theory for the User (2nd Edition) / L. Ljung. – Prentice Hall PTR, 1998. – 524 p.
5. Карабутов Н. Н. Структурная идентификация систем: Анализ динамических структур / Н. Н. Карабутов. – М. : МГИУ, 2008. – 160 с.
6. Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний: Учебное пособие [В. С. Анищенко, В. В. Астахов, Т. Е. Вадивасова и др.]. – М. : УРСС, 2008 – 144 с.
7. Растрягин Л. А. Случайный поиск в задачах оптимизации многопараметрических систем / Л. А. Растрягин. – Рига : Зинатне, 1965. – 212 с.
8. Ивахненко М. М. Интегральный метод прямого поиска глобального экстремума / М. М. Ивахненко // Адаптивные системы автоматического управления. – 1980. – № 8. – С. 54–63.
9. Guda A. I. Criteria synthesis problem for the chaotic systems / A. I. Guda, A. I. Mikhalyov // Data Stream Mining & Processing (DSMP): IEEE First International Conference, Lviv 23–27 August 2016: proceedings. – Lviv : IEEE, 2016. – P. 125–128.
10. Guda A. I. Multi-model methods and parameters estimation approaches on non-linear dynamic system identification / A. I. Guda, A. I. Mikhalyov // Regional interuniversity compendium of scientific works “System technologies”. – 2016. – Vol. 2 (103). – P. 57–62.
11. Guda A. I. Method of Lorenz systems parametric identification by the searching models ensemble / A. I. Guda, A. I. Mikhalyov // Computer Sciences and Information Technologies. – 2015. – Vol. 1. – P. 73–75.
12. Guda A. I. Multi-model identification system properties near extremum: simulations and analysis / A. I. Guda, A. I. Mikhalyov // Journal of Applied Computer Science. – 2015. – Vol. 23, No. 2. – P. 21–28.

Article was submitted 28.11.2016.  
After revision 05.12.2016.

**Ключові слова:** ідентифікація нелинейних динаміческих систем, мультимодельные методы ідентификации, моделирование, оценивание экстремума.

Гуда А. І.<sup>1</sup>, Михальов П. І.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри інформаційних технологій і систем Національної Металургійної академії України (НМетАУ), Дніпро, Україна

<sup>2</sup>Д-р техн. наук, професор, зав. кафедри інформаційних технологій і систем Національної Металургійної академії України (НМетАУ), Дніпро, Україна

## ПОРІВНЯННЯ БАГАТОМОДЕЛЬНИХ МЕТОДІВ ІДЕНТИФІКАЦІЇ У ЗАДАЧІ ІДЕНТИФІКАЦІЇ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

У статті розглянуто кілька методів ідентифікації для нелінійних (можливо хаотичних) динаміческих систем. Переваги і недоліки існуючих методів згадуються. Всі методи використовують множину моделей. Пропонуються різні тактики для руху параметрів моделі з метою розв'язання задачі ідентифікації. Найпростіша тактика використовує моделі з фіксованими параметрами. Цей метод має просту реалізацію, забезпечує найкращу швидкість ідентифікації і гіршу точність. Метод з моделями з обмеженою смугою пошуку дозволяє домогтися більшої точності, завдяки використанню моделей, які налаштовують свій параметр в значення локального максимуму, але схилено до високочастотним коливанням через ігнорування динаміки самої системи ідентифікації. Підхід з моделями, чий рух імітує рух тіла під дією зовнішніх сил і в'язкого тертя демонструє мінімальні помилки ідентифікації і значну швидкість. Проведено моделювання процесу ідентифікації і зроблені висновки. Згідно з результатами моделювання, виділені переваги та недоліки. Висновки дозволяють зробити правильний вибір в задачі вибору способу ідентифікації. Крім того, результати дозволяють правильно вибрати деякі параметри в системі ідентифікації.

**Ключові слова:** ідентифікація нелінійних динаміческих систем, мультимодельні методи ідентифікації, моделювання, оцінювання екстремуму.

## REFERENCES

1. Moon F. C. Chaotic vibrations. An introduction for applied scientists and engineers. Weinheim, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co, 2004, 310 p.
2. Anishchenko V. S. Slozhnye kolebanija v prostykh sistemah. Mehanizmy vozniknovenija, struktura i svojstva dinamicheskogo haosa v radiofizicheskikh sistemah. Moscow, Librokom, 2009, 320 p.
3. Eykhoff P. System Identification Parameter and State Estimation. Wiley-Interscience, 1974, 555 p.
4. Ljung L. System Identification: Theory for the User (2nd Edition). Prentice Hall PTR, 1998, 524 p.
5. Karabutov N. N. Strukturnaja identifikacija sistem: Analiz dinamicheskikh struktur. Moscow, MGIU, 2008, 160 p.
6. Anishchenko V. S., Astahov V. V., Vadivasova T. E. i dr. Sinhronizacija reguljarnyh, haoticheskikh i stohasticheskikh kolebanij: Uchebnoe posobie. Moscow, URSS, 2008, 144 p.
7. Rastrigin L. A. Sluchajnyj poisk v zadachah optimizacii mnogoparametricheskikh sistem. Riga, Zinatne, 1965, 212 p.
8. Ivahnenko M. M. Integral'nyj metod priamogo poiska global'nogo jekstremuma, *Adaptivnye sistemy avtomaticheskogo upravlenija*, 1980, No. 8, pp. 54–63.
9. Guda A. I., Mikhalyov A. I. Criteria synthesis problem for the chaotic systems, *Data Stream Mining & Processing (DSMP): IEEE First International Conference, Lviv 23–27 August 2016: proceedings*. Lviv, IEEE, 2016, P. 125–128.
10. Guda A. I., Mikhalyov A. I. Multi-model methods and parameters estimation approaches on non-linear dynamic system identification, *Regional interuniversity compendium of scientific works "System technologies"*, 2016, Vol. 2(103), pp. 57–62.
11. Guda A. I., Mikhalyov A. I. Method of Lorenz systems parametric identification by the searching models ensemble, *Computer Sciences and Information Technologies*, 2015, Vol. 1, pp. 73–75.
12. Guda A. I., Mikhalyov A. I. Multi-model identification system properties near extremum: simulations and analysis, *Journal of Applied Computer Science*, 2015, Vol. 23, No. 2, pp. 21–28.

УДК 62-503.57

Хобін В. А.<sup>1</sup>, Левинський М. В.<sup>2</sup><sup>1</sup>Д-р техн. наук, професор, заведуючий кафедрою автоматизації технологіческих процесів і робототехніческих систем Одесської національної академії піщевих технологій, Одеса, Україна<sup>2</sup>Аспірант кафедри автоматизації технологіческих процесів і робототехніческих систем Одесської національної академії піщевих технологій, Одеса, Україна

## ОПТИМИЗАЦІЯ ФІЛЬТРОВ СОБСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ САМОНАСТРАІВАЮЩЕСЯ САУ ОБ'ЄКТОМ ТЕХНОЛОГІЧЕСКОГО ТИПА

Технологические процессы как объекты управления характеризуются существенным запаздыванием реакции управляемых переменных на управляющие воздействия и большим количеством изменяющихся факторов, влияющих на процесс, но практически недоступных для измерения. Эти особенности на практике часто приводят к существенному ухудшению работы систем управления с типовыми алгоритмами и усложняют построение самонастраивающихся систем управления для данного типа объектов. Факторы, в зависимости от последствий их проявления на объекте управления, подразделяются на неконтролируемые координатные и параметрические возмущения. В статье рассматривается случай, когда спектральный состав параметрических возмущений является существенно более низкочастотным по сравнению со спектральным составом координатных возмущений. Факторы, вызывающие высокочастотные изменения управляемых переменных, которые не могут быть скомпенсированы управляющими воздействиями, рассматриваются как шумы. Для объектов технологического типа, у которых параметрические возмущения вызывают изменения коэффициента передачи, предложена структура самонастраивающейся системы автоматического управления. В отличие от многих известных, принцип ее работы предполагает пассивную идентификацию изменений коэффициента передачи в замкнутом контуре. Из общего движения замкнутой системы, которое возникает под влиянием координатных возмущений, с помощью полосовых фильтров выделяется составляющая собственного движения. По изменениям в спектре этой составляющей контур самонастройки определяет текущие значения коэффициента передачи объекта управления и изменяет коэффициент передачи регулятора системы стабилизации для сохранения устойчивой ее работы. Проведены компьютерные эксперименты по оценке влияния изменений спектрального состава координатных возмущений и шумов на качество самонастройки, показана возможность проведения оптимального параметрического синтеза системы, предложены рекомендации по приближенному определению параметров контура самонастройки.

**Ключевые слова:** самонастраивающаяся САУ, коэффициент передачи, собственное движение, полосовой фильтр, оптимальный параметрический синтез.

### НОМЕНКЛАТУРА

- АЧХ – амплитудо-частотная характеристика;
- ЛПФ – линейные полосовые фильтры;
- ОУ – объект управления;
- САР – система автоматического регулирования;
- САРС – САР самонастраивающаяся;
- САУ – система автоматического управления;
- ФНЧ – фильтр низкой частоты;
- $A^z$  – константа, определяющая запас устойчивости линейной САР;
- $\hat{D}_{\tilde{y}_a}(t, \tau_{oc})$  и  $\hat{D}_{\tilde{y}_{ma}}(t, \tau_{oc})$  – оценки дисперсий переменных на выходах полосовых фильтров;
- $f_k(t)$  – координатные неконтролируемые возмущения;
- $f_p(t)$  – параметрические неконтролируемые возмущения;
- $f_n(t)$  – широкополосные шумы;
- $k_o$  – коэффициент передачи ОУ;
- $k_m$  – коэффициент передачи модели ОУ;
- $k_r$  – коэффициент передачи регулятора САР;
- $t_n, t_{mod}$  – моменты времени, соответствующие началу и концу моделирования;
- $y(t)$  – управляемая переменная, как функция времени  $t$ ;
- $y^z(t)$  – заданное значение управляемой переменной;
- $\tilde{y}(t)$  – составляющая  $y(t)$ , характеризующая собственное движение в замкнутом контуре САР (среднечастотная);

$\bar{y}(t)$  – постоянная либо медленно меняющаяся составляющая, обусловлена  $y^z(t)$  и  $f_k(t)$ . Когда  $y^z(t)=\text{const}$  и  $f_k(t)=\text{const}$ , то в астастических САР  $\bar{y}(t) = y^z$ ;

$y_l(t)$  – составляющая  $y(t)$ , вызванная координатными возмущениями  $f_k(t)$  (низкочастотная);

$y_n(t)$  – составляющая, вызванная шумами  $f_n(t)$  (высокочастотная);

$y_m(t)$  – переменная на выходе модели ОУ;

$\tilde{y}_a(t), \tilde{y}_{ma}(t)$  – переменные на выходах полосовых фильтров;

$s$  – оператор дифференцирования;

$\omega_L, \omega_H$  – частоты срезов полосовых фильтров в низкочастотной и высокочастотной области;

$\tau_{oc}$  – скользящий интервал времени усреднения переменных.

### ВВЕДЕНИЕ

Технологические процессы, как специфический тип объектов управления, имеют характерные особенности, которые отличают их от других типов: мобильного, механического, электротехнического, электронного и др. К ним, прежде всего, относятся: а) физическая распределенность каналов управления, проявляющаяся в значительных запаздываниях реакции управляемых переменных на управляющие воздействия; б) большое количество факторов, влияющих на работу ОУ, но практически недоступных для измерения (характеристики сырьевых и энергетических потоков, состояние рабо-

чих органов, поверхностей теплообмена и т. д.), проявляющихся как неконтролируемые координатные и параметрические возмущения, которые изменяют значения управляемых переменных и свойства каналов управления [1]. Эти особенности, если их рассматривать в контексте данной статьи, существенно усложняют построение самонастраивающихся систем для ОУ технологического типа.

Разделение возмущений на координатные и параметрические в значительной мере условно. Оно продиктовано необходимостью математического описания и целенаправленного анализа САУ. К координатным относят те возмущения, которые проявляются в изменениях текущих значений управляемых переменных ОУ (их координатах состояния). К параметрическим – те, которые отражаются изменениями значений параметров в моделях ОУ. Они не только изменяют значения управляемых переменных, но и, что принципиально важно, изменяют характер собственного движения САР (движения в замкнутом контуре), влияя на его устойчивость. Как показывает практика, координатные возмущения обуславливаются значительно более быстрыми процессами (из перечисленных ранее), чем параметрические возмущения. Поэтому для рассматриваемых ОУ технологического типа спектральный состав параметрических возмущений принимается существенно более низкочастотным по сравнению со спектральным составом координатных возмущений.

Возмущения, вызывающие достаточно высокочастотные изменения управляемых переменных, которые не могут сколько-нибудь эффективно быть скомпенсированы управляющим воздействием в контуре обратной связи САУ, назовем шумами. Очевидно, что такое определение шумов включает в себя и шумы измерения. В моделях шумы удобно рассматривать как переменную, аддитивную управляемой переменной.

Наиболее часто параметрические возмущения вызывают изменения коэффициента передачи ОУ. Относительный диапазон его изменения может достигать и даже превышать значение десять [2]. При таких изменениях коэффициента передачи типовая САР с неизменными параметрами регулятора будет работать либо крайне неэффективно (при настройке параметров на случай максимального значения коэффициента передачи ОУ) либо периодически будет терять устойчивость. Самонастройка регулятора в этом случае является безальтернативным инструментом сохранения компромисса между показателями качества и устойчивостью процессов в системе автоматического управления таким ОУ.

Объект исследования в данной статье – самонастраивающаяся система автоматического управления объектом технологического типа, способная идентифицировать изменяющийся под влиянием параметрических возмущений коэффициент передачи объекта и изменять коэффициент передачи регулятора системы стабилизации для сохранения устойчивой ее работы.

Цель исследований – выявить влияние изменений спектрального состава координатных возмущений и шумов на показатели качества работы САРС при различных параметрах блока самонастройки, определить оптимальные значения этих параметров, предложить рекомендации по их приближенному определению.

## 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В САР изменения во времени регулируемой переменной  $y(t)$  относительно заданного значения  $y^*$  часто представляют в виде суммы вынужденной составляющей  $y_v(t)$ , которая определяется свойствами внешних координатных возмущений  $f_k(t)$ , шумов  $f_n(t)$ , воздействующих на объект управления и собственной составляющей  $y_c(t)$ , зависящей от параметров ОУ и регулятора [3]:

$$y(t) = y_v(t) + y_c(t).$$

С другой стороны, изменения во времени регулируемой переменной  $y(t)$  можно представить в виде аддитивной модели составляющих с различным спектральным составом [1]:

$$y(t) = \bar{y}(t) + y_l(t) + \tilde{y}(t) + y_n(t).$$

Изменения коэффициента передачи ОУ  $k_o(t)$  отражаются в изменениях  $\tilde{y}(t)$ . В случае, когда с помощью фильтров, пусть приближенно, удается выделить из общего движения  $y(t)$  среднечастотную составляющую  $\tilde{y}(t)$ , которая характеризует главным образом собственное движение  $y_c(t)$  САР, то по изменениям параметров этой составляющей можно судить о текущих значениях коэффициента передачи  $k_o(t)$  объекта управления.

## 2 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Большинство известных систем самонастройки используют специально организованные тестовые движения в САР для идентификации текущих изменений коэффициента передачи ОУ [4]. При этом возникает опасность нарушений регламентов в изменениях регулируемой переменной ОУ и, как следствие, – аварийные ситуации. Известны также самонастраивающиеся системы с пассивной идентификацией в замкнутом контуре САР [5, 6], которые используют изменения регулируемой переменной ОУ, естественно возникающие в результате воздействия координатных возмущений. Из общего движения регулируемой переменной ОУ с помощью фильтров высокой частоты выделяется компонента, спектральный состав которой характеризует собственное движение САР, и по изменениям в спектре которой судят об изменениях коэффициента передачи ОУ. К сожалению, в [5, 6] не приведено каких-либо рекомендаций по выбору структуры и параметров фильтров, а также критериев их оптимизации.

В [7] в упрощенном варианте при разомкнутом контуре самонастройки определен подход к выбору структуры и параметров фильтров для самонастраивающихся САР. В качестве линейных фильтров для САРС рекомендованы полосовые фильтры Баттервортса не ниже четвертого порядка.

## 3 МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Рассмотрим структурную схему и принцип работы самонастраивающейся САР (см. рис. 1). В процессе эксплуатации на ОУ действуют внешние неконтролируемые координатные  $f_k(t)$  и параметрические  $f_p(t)$  возмущения, а также широкополосные шумы  $f_n(t)$ , которые в общем случае представляют собой случайные процессы. При изменении режимов работы, а также вследствие

процесов деградації обладнання изменяется, в частности, коэффициент передачи  $k_o$  ОУ. Регулятор САР стабилизирует регулируемую координату  $y(t)$  на уровне  $y^z$ , частично подавляя последствия влияния координатных возмущений  $f_k(t)$  на управляемую переменную  $y(t)$ , оставаясь работоспособным в некотором узком диапазоне изменений  $k_o$  ОУ. Для подавления шумов  $f_n(t)$  в системе используется ФНЧ.

Значительные параметрические возмущения  $f_p(t)$ , вызывающие изменения  $k_o$ , требуют перенастройки коэффициента передачи  $k_r$  регулятора САР в реальном времени для сохранения устойчивости системы. Эту функцию в САРС выполняет блок самонастройки. В его состав входит модель ОУ, на вход которой подается управляющее воздействие  $u(t)$  регулятора САР. Управляемая переменная  $y(t)$  объекта и выход его модели  $y_m(t)$  поступают на входы полосовых фильтров. Последние подавляют последствия влияния на  $y(t)$  и  $y_m(t)$  координатных возмущений  $f_k(t)$  и шумов  $f_n(t)$ . На выходе фильтров формируются переменные  $\tilde{y}_a(t)$  и  $\tilde{y}_{ma}(t)$ , характеризующие собственное движение САР. Вычислители оценок дисперсии на скользящем интервале времени  $\tau_{oc}$  усредняют переменные  $\tilde{y}_a(t)$  и  $\tilde{y}_{ma}(t)$ , вычисляя оценки их дисперсий  $\hat{D}_{\tilde{y}_a}(t, \tau_{oc})$  и  $\hat{D}_{\tilde{y}_{ma}}(t, \tau_{oc})$ , которые, как показано в [7], пропорциональны текущим значениям квад-

ратов коэффициентов передачи  $k_o^2(t), k_m^2(t)$  ОУ и его модели. Изменения оценки дисперсии  $\hat{D}_{\tilde{y}_a}(t, \tau_{oc})$  свидетельствуют о начавшихся изменениях коэффициента передачи  $k_o(t)$  ОУ.

Параметрический регулятор воспринимает сигнал разности оценок  $e1(t, \tau_{oc}) = \hat{D}_{\tilde{y}_a}(t, \tau_{oc}) - \hat{D}_{\tilde{y}_{ma}}(t, \tau_{oc})$  и стабилизирует оценку дисперсии  $\hat{D}_{\tilde{y}_{ma}}(t, \tau_{oc})$  модели на уровне оценки дисперсии  $\hat{D}_{\tilde{y}_a}(t, \tau_{oc})$  ОУ за счет изменения коэффициента передачи  $k_m(t)$  модели. Другими словами, модель ОУ и параметрический регулятор в реальном времени отслеживают изменения  $k_o(t)$  ОУ и поддерживают коэффициент передачи  $k_m(t)$  модели. Текущее значение  $k_m(t)$ , пропорциональное  $k_o(t)$ , с выхода параметрического регулятора поступает также на вычислитель  $k_r$ , который определяет значение коэффициента передачи  $k_r(t)$  регулятора САР, исходя из постоянства произведения  $A^2 = k_o \cdot k_r$ . Тем самым обеспечивается устойчивая работа основного контура САР при изменениях коэффициента передачи ОУ.

#### 4 ЕКСПЕРИМЕНТИ

В структуре САРС присутствуют несколько нелинейностей, поэтому аналитическое решение задач ее анали-

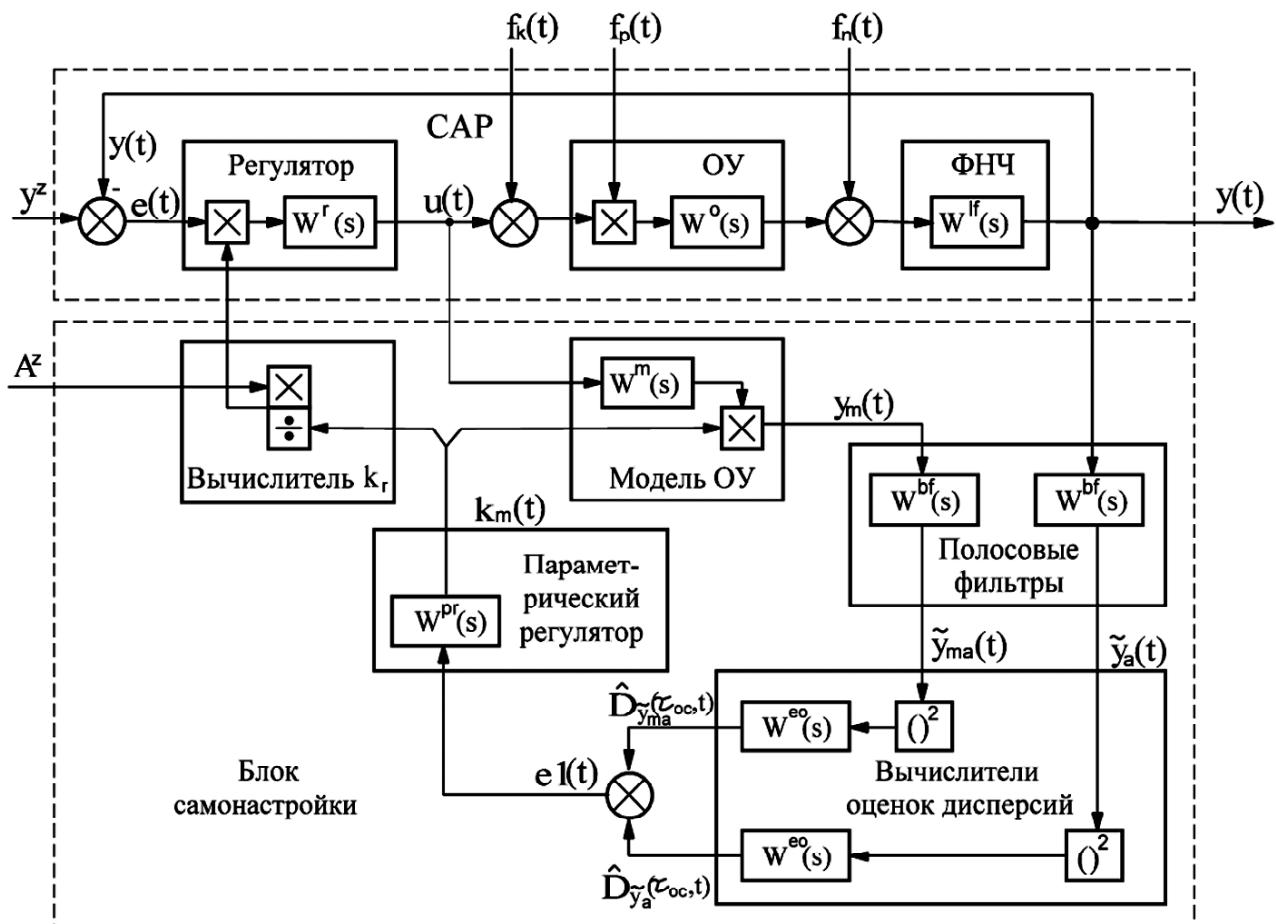


Рисунок 1 – Структурная схема САРС

за і синтеза затруднено. Учитывая это, инструментом для исследования САРС выбрано ее моделирование в среде Simulink/Matlab и проведен многофакторный компьютерный эксперимент.

Рассмотрим условия проведения сравнительных исследований.

Динамика ОУ представлена моделью «виртуального» ОУ с передаточной функцией:

$$W^o(s) = \frac{k_o}{T_o s + 1} \exp(-\tau_o s), \quad (1)$$

где  $\tau_o = 1$ ,  $T_o = 1$  – значения времени запаздывания и постоянной времени, определенные согласно рекомендаций [8]. При моделировании коэффициент передачи ОУ изменялся по гармоническому закону  $k_o(t) = 1 + 0,6 \sin(0,01t)$ .

Передаточная функция регулятора САР:

$$W^r(s) = k_r \cdot (1 + 1/T_{iz}s), \quad (2)$$

где  $k_r = 1,63$ ;  $T_{iz} = 3,15$  – значения коэффициента передачи и времени изодрома, соответствующие оптимуму интегрального квадратичного критерия ошибки регулирования.

Модели координатных возмущений по каналу « $f_k - y$ »

$$f_k(t) = m_{fk} + \tilde{f}_k(t);$$

$$m_{fk} = 1, S_{\tilde{f}_k}(\omega) = 1/(1 + (\omega/0,25)^4), \quad (3)$$

$$m_{fk} = 1, S_{\tilde{f}_k}(\omega) = 1/(1 + (\omega/0,5)^4), \quad (4)$$

$$m_{fk} = 1, S_{\tilde{f}_k}(\omega) = 1/(1 + (\omega/0,75)^4), \quad (5)$$

где  $m_{fk}$  – постоянная составляющая,  $f_k(t)$ ,  $S_{\tilde{f}_k}(\omega)$  – спектральная плотность случайной составляющей  $\tilde{f}_k(t)$ . Случайная составляющая  $\tilde{f}_k(t)$  формировалась с помощью фильтра с передаточной функцией  $W^{fk}(s) = \omega_{fk}^2 / (s^2 + \sqrt{2} \cdot \omega_{fk} s + \omega_{fk}^2)$  из сигнала псевдобелого шума при частотах среза  $\omega_{fk} \in 0,25; 0,5; 0,75$  рад/с.

Высокочастотные шумы  $f_n(t)$  формировались из сигнала псевдобелого шума с помощью полосового фильтра с вариантами передаточных функций:

$$\begin{aligned} W_1^{fn}(s) &= \frac{s^2}{s^2 + 1,414 \cdot \omega_L s + \omega_L^2} \cdot \frac{\omega_H^2}{s^2 + 1,414 \cdot \omega_H s + \omega_H^2} = \\ &= \frac{s^2}{s^2 + 1,414 \cdot 2s + 2^2} \cdot \frac{4^2}{s^2 + 1,414 \cdot 4s + 4^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$W_2^{fn}(s) = \frac{s^2}{s^2 + 1,414 \cdot 4s + 4^2} \cdot \frac{6^2}{s^2 + 1,414 \cdot 6s + 6^2}, \quad (7)$$

$$W_3^{fn}(s) = \frac{s^2}{s^2 + 1,414 \cdot 6s + 36} \cdot \frac{64}{s^2 + 1,414 \cdot 8s + 64}. \quad (8)$$

Для подавления высокочастотных шумов  $f_n(t)$  в САР использовался фильтр низкой частоты

$$W^{lf}(s) = \frac{3^2}{s^2 + 1,414 \cdot 3s + 3^2}. \quad (9)$$

Модель ОУ в контуре самонастройки:

$$W^m(s) = \frac{k_m}{(T_m s + 1)} \exp(-\tau_m s), \quad (10)$$

где  $k_m$  – настраиваемый коэффициент передачи,  $\tau_m = \tau_o$ ,  $T_m = T_o$  – значения времени запаздывания и постоянной времени.

Передаточные функции вариантов ЛПФ (взяты фильтры Баттерворта, АЧХ которых имеет горизонтальный участок в полосе пропускания [9]):

$$a) W_1^{bf}(s) = \frac{s^2}{s^2 + 1,414 \cdot \omega_L s + \omega_L^2} \cdot \frac{\omega_H^2}{s^2 + 1,414 \cdot \omega_H s + \omega_H^2}; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} b) W_3^{bf}(s) &= \frac{s^2}{s^2 + 1,848 \cdot \omega_L s + \omega_L^2} \cdot \frac{s^2}{s^2 + 0,765 \cdot \omega_L s + \omega_L^2} \times \\ &\times \frac{\omega_H^2}{s^2 + 1,848 \cdot \omega_H s + \omega_H^2} \cdot \frac{\omega_L^2}{s^2 + 0,765 \cdot \omega_H s + \omega_H^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Оценки дисперсий  $\hat{D}_{\tilde{y}_a}(t, \tau_{oc})$  и  $\hat{D}_{\tilde{y}_{ma}}(t, \tau_{oc})$  определялись путем экспоненциально взвешенного усреднения случайных процессов  $\tilde{y}_a^2(t)$  и  $\tilde{y}_{ma}^2(t)$  на скользящем интервале усреднения  $\tau_{oc} = 2 \cdot T_{oe}$  по зависимостям [10]:

$$\hat{D}_{\tilde{y}_a}(t, \tau_{oc}) = W^{eo}(s) \cdot \tilde{y}_a^2(t) = \frac{1}{T_{oe}s + 1} \cdot \tilde{y}_a^2(t),$$

$$\hat{D}_{\tilde{y}_{ma}}(t, \tau_{oc}) = W^{eo}(s) \cdot \tilde{y}_{ma}^2(t) = \frac{1}{T_{oe}s + 1} \cdot \tilde{y}_{ma}^2(t). \quad (13)$$

Передаточная функция параметрического регулятора аналогична (2):

$$W^{rp}(s) = k_{rp} \cdot (1 + 1/T_{izp}s), \quad (14)$$

где  $k_{rp}$ ;  $T_{izp}$  – коэффициент передачи и время изодрома.

Опишем планирование компьютерных экспериментов. Цель проведения экспериментов – определить влияние изменений спектрального состава внешних возмущений и шумов на показатели качества работы САРС при различных параметрах блока самонастройки. Качество оценивалось по интегральным квадратичным критериям:

$$I_1 = \int_{t_n}^{t_{mod}} e^2(t) dt / (t_{mod} - t_n), \quad (15)$$

$$I_2 = \int_{t_n}^{t_{mod}} e1^2(t) dt / (t_{mod} - t_n), \quad (16)$$

$$I_3 = \int_{t_n}^{t_{mod}} (k_o(t) - k_m(t))^2 dt / (t_{mod} - t_n). \quad (17)$$

Следует отметить, что критерий (15) является основным, т.к. характеризует качество работы САР по значениям ошибки регулирования  $e(t)$ . Критерии (16), (17) – вспомогательные, и служат для оценки качества самонастройки коэффициента передачи модели  $k_m(t)$  к изменяющемуся коэффициенту передачи  $k_o(t)$  ОУ.

Степень близости переменных на выходах фильтров  $\tilde{y}_a(t)$  и  $\tilde{y}_{ma}(t)$  оценивалась по статистическому коэффициенту корреляции [11]:

$$\hat{r}_{\tilde{y}_a \tilde{y}_{ma}} = \frac{\hat{R}_{\tilde{y}_a \tilde{y}_{ma}}(\tau_k = 0)}{\hat{\sigma}_{\tilde{y}_a} \cdot \hat{\sigma}_{\tilde{y}_{ma}}} = \frac{\frac{1}{t_{mod} - t_n} \int_{t_n}^{t_{mod}} \tilde{y}_a(t) \cdot \tilde{y}_{ma}(t) dt}{\sqrt{\frac{1}{t_{mod} - t_n} \int_{t_n}^{t_{mod}} \tilde{y}_a^2(t) dt} \cdot \sqrt{\frac{1}{t_{mod} - t_n} \int_{t_n}^{t_{mod}} \tilde{y}_{ma}^2(t) dt}}, \quad (18)$$

где на интервале моделирования  $t_{mod} - t_n$  определены оценки:  $\hat{R}_{\tilde{y}_a \tilde{y}_{ma}}(\tau_k = 0)$  – корреляционного момента при нулевом сдвиге между процессами;  $\hat{\sigma}_{\tilde{y}_a}$ ,  $\hat{\sigma}_{\tilde{y}_{ma}}$  – среднеквадратических отклонений переменных  $\tilde{y}_a(t)$  и  $\tilde{y}_{ma}(t)$ .

Компьютерные эксперименты предполагают целенаправленное имитационное моделирование структур-

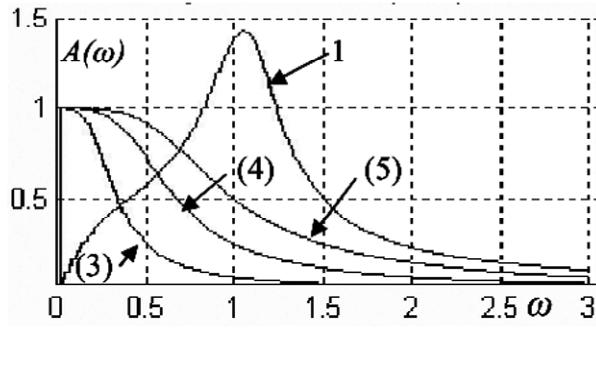
ной схемы по рис. 1 в среде Simulink пакета программ Matlab. Рассматривались варианты САР в составе «виртуального» ОУ (1), регулятора (2), фильтра низкой частоты (9) при воздействии координатных возмущений  $f_k(t)$  с вариантами моделей (3), (4), (5) и шумов  $f_n(t)$  с вариантами моделей (6), (7), (8). Обоснование выбора параметров моделей следует из рис. 2: модели (3), (4)  $f_k(t)$  имеют низкочастотный характер по сравнению с АЧХ САР, что соответствует принятому ранее условию о низкочастотном характере координатных возмущений. Модель (5)  $f_k(t)$  намерено была выбрана с нарушением данного условия. Аналогично модели (7), (8)  $f_n(t)$  можно отнести к высокочастотным шумам, а модель (6)  $f_n(t)$  уже занимает среднечастотную область, где располагается АЧХ САР.

## 5 РЕЗУЛЬТАТИ

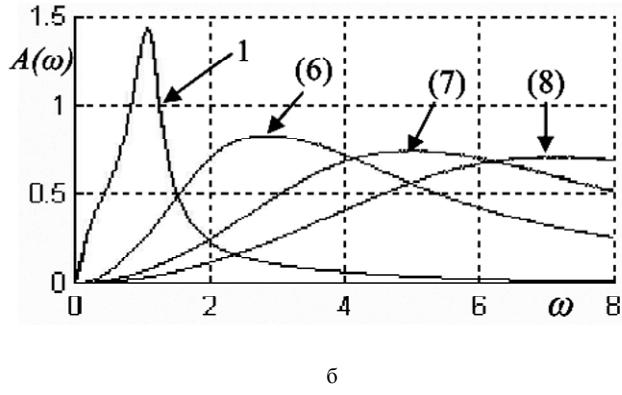
С помощью программы Design Optimization пакета Matlab/Simulink был проведен поиск зависимости

$$k_{rp}^*, T_{izp}^*, T_{oe}^*, \omega_L^*, \omega_H^* = \arg \min I_1(k_{rp}, T_{izp}, T_{oe}, \omega_H, \omega_L) \quad (19)$$

и определены оптимальные значения параметров контура самонастройки САР  $k_{rp}^*, T_{izp}^*, T_{oe}^*, \omega_L^*, \omega_H^*$  при неизменных параметрах контура САР и моделях внешних воздействий (4), (7). Зафиксировав ряд параметров на уровне оптимальных значений, можно определить сечение зависимости (19) как функцию от параметра, значения которого изменяются. Как следует из рис. 3 и рис. 4, по всем сечениям (19) наблюдается экстремум – минимум  $I_1$ .

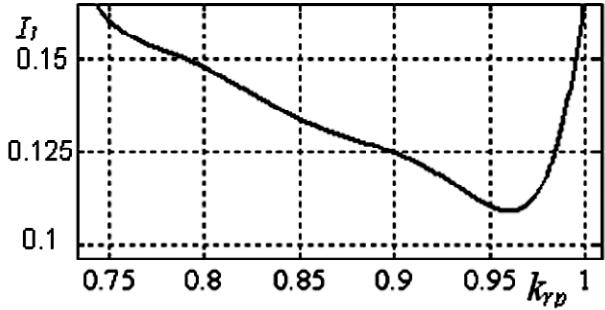


а

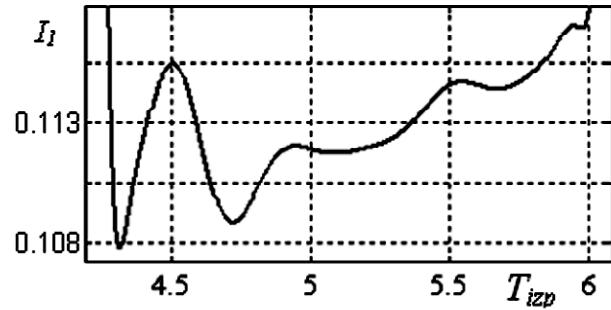


б

Рисунок 2 – АЧХ:  
а – САР, б – фильтров, формирующих внешние воздействия (4)–(8)



а



б

Рисунок 3 – Зависимости критерия оптимизации  $I_1$  (15) от параметров параметрического регулятора (14): а –  $k_{rp}$ , б –  $T_{izp}$

Однако он находится вблизи от границы устойчивости и САРС с оптимальными параметрами  $k_{rp}^*, T_{izp}^*, T_{oe}^*, \omega_L^*, \omega_H^*$  является негрубой к изменениям условиям функционирования. Поэтому можно принять следующую рекомендацию по выбору параметров контура самонастройки САРС: параметры  $k_{rp}, T_{oe}, \omega_L, \omega_H$  следует выбирать на 10...15% меньше оптимальных, а параметр  $T_{izp}$  – на 10...15% больше.

На рис. 5 представлены АЧХ полосовых фильтров (11), (12) с оптимальными частотами срезов  $\omega_L^*, \omega_H^*$ , которые получены при воздействии внешних возмущений  $f_k(t)$  (4) и шумов  $f_n(t)$  (7). Если в результате предварительной идентификации удается получить зависимости спектральной плотности мощности случайных процессов  $f_k(t)$  и  $f_n(t)$ , а следовательно и модели формирующих фильтров типа (4), (7), то на основании рис. 5 можно сформулировать рекомендации по выбору настроек полосовых фильтров (11), (12), АЧХ которых должны пересекаться с АЧХ формирующих фильтров (4), (7) на уровне 0,5...0,6.

Эффективность выделения полосовыми фильтрами (11) собственного движения САР иллюстрирует рис. 6. Следует отметить, что, невзирая на существенные вне-

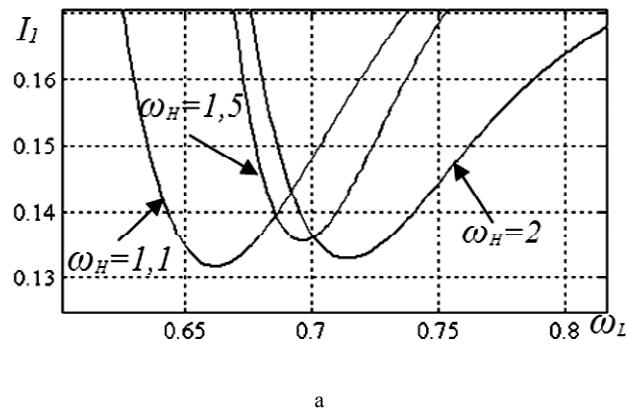
шние отличия в изменениях регулируемой переменной  $y(t)$  ОУ и  $y_m(t)$  его модели, после фильтрации переменные  $\tilde{y}_a(t)$  и  $\tilde{y}_{ma}(t)$  становятся более близкими по спектральному составу. На всех графиках оценок спектральных плотностей  $\hat{S}(\omega)$  отчетливо выделяется резонансная частота  $\omega_{rez}$  АЧХ САР.

Как следует из рис. 5 и 6, в качестве рекомендаций по выбору первоначальных значений частот среза полосовых фильтров (11) можно принять  $\omega_L \approx \omega_{8\tau_o} = 2\pi/8\tau_o$  и  $\omega_H \approx \omega_{2\tau_o} = 2\pi/2\tau_o$ .

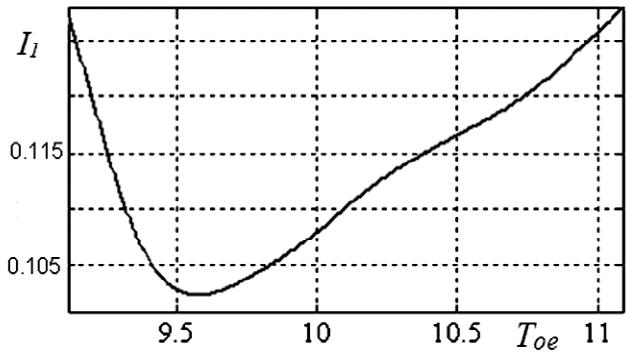
Рис. 7 позволяет провести сравнительный анализ работы САР без самонастройки и САРС.

При изменении коэффициента передачи ОУ  $k_o(t) = 1 + 0,6\sin(0,01t)$  САР без самонастройки становится неустойчивой. САРС за счет отслеживания изменений  $k_o(t) \Rightarrow k_m(t)$  и последующего перерасчета коэффициента передачи  $k_r(t)$  регулятора основного контура САР остается работоспособной.

Степень близости  $k_m(t)$  к  $k_o(t)$ , т.е. качество самонастройки при использовании фильтров (11) можно оценить по табл. 1.

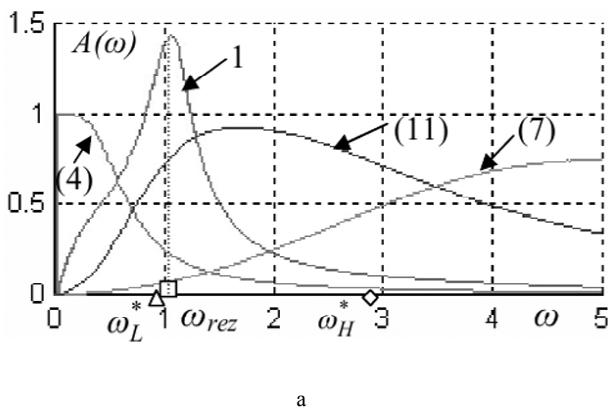


а

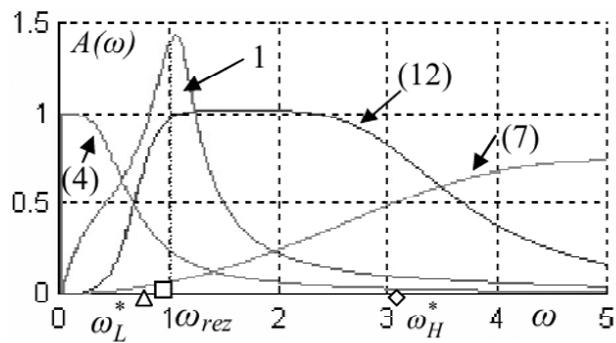


б

Рисунок 4 – Зависимости критерия оптимизации  $I_1$  (15) от параметров:  
 а – полосовых фильтров (11); б – фильтра усреднения (13)



а



б

Рисунок 5 – АЧХ: 1 – САР, полосовых фильтров (11), (12) и фильтров (4), (7), формирующих внешние воздействия  $f_k(t)$  и  $f_n(t)$ ;  
 $\omega_{rez}$  – резонансная частота АЧХ САР,  $\Delta, \diamond, \square$  – метки частот  $\omega_L^*, \omega_H^*, \omega_{rez}$

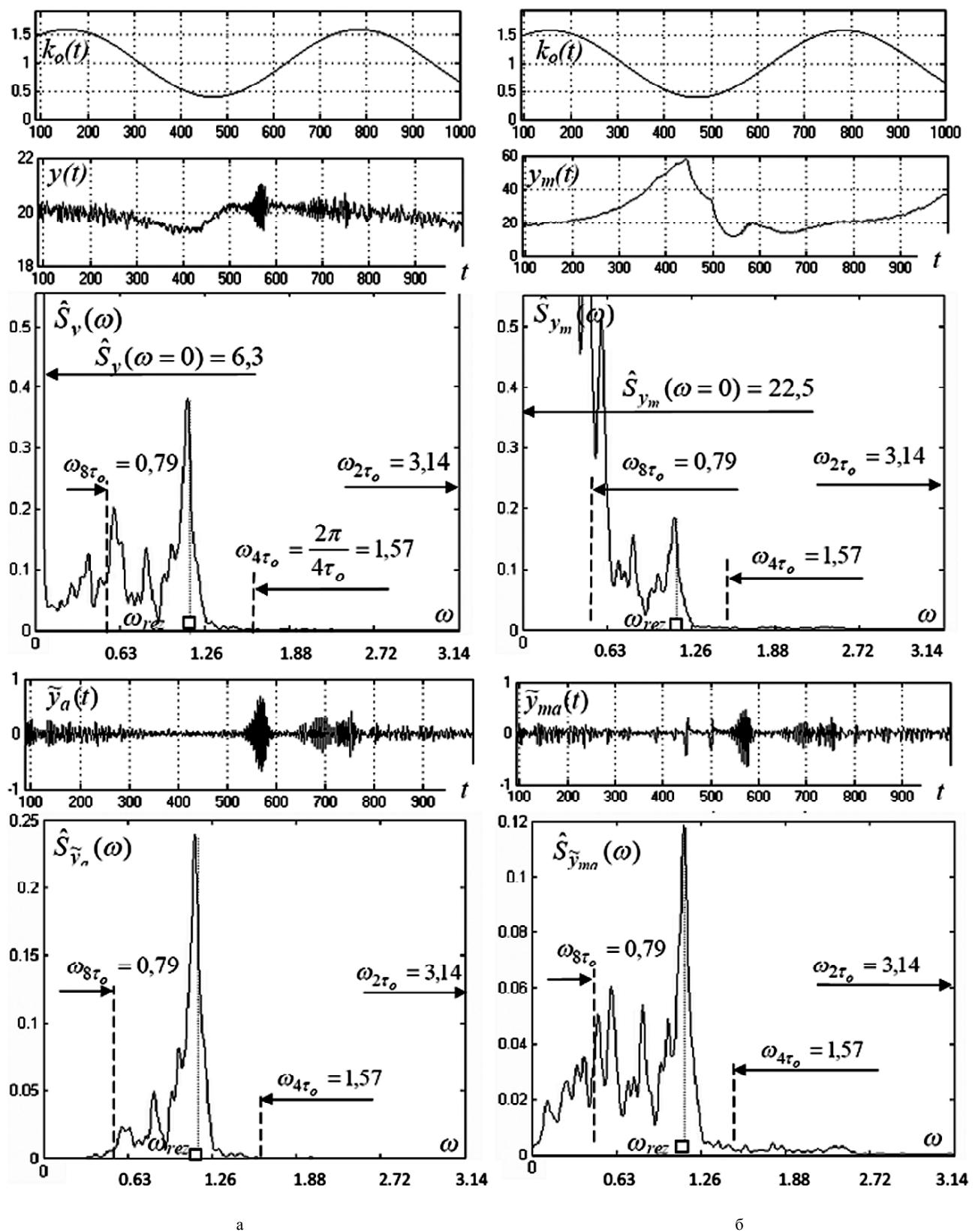


Рисунок 6 – Результаты моделирования влияния изменений коэффициента передачи  $k_o(t)$  на характер изменений регулируемой переменной  $y(t)$  ОУ (а) и  $y_m(t)$  ее модели (б) до и после фильтрации (□ – метка  $\omega_{rez}$ )

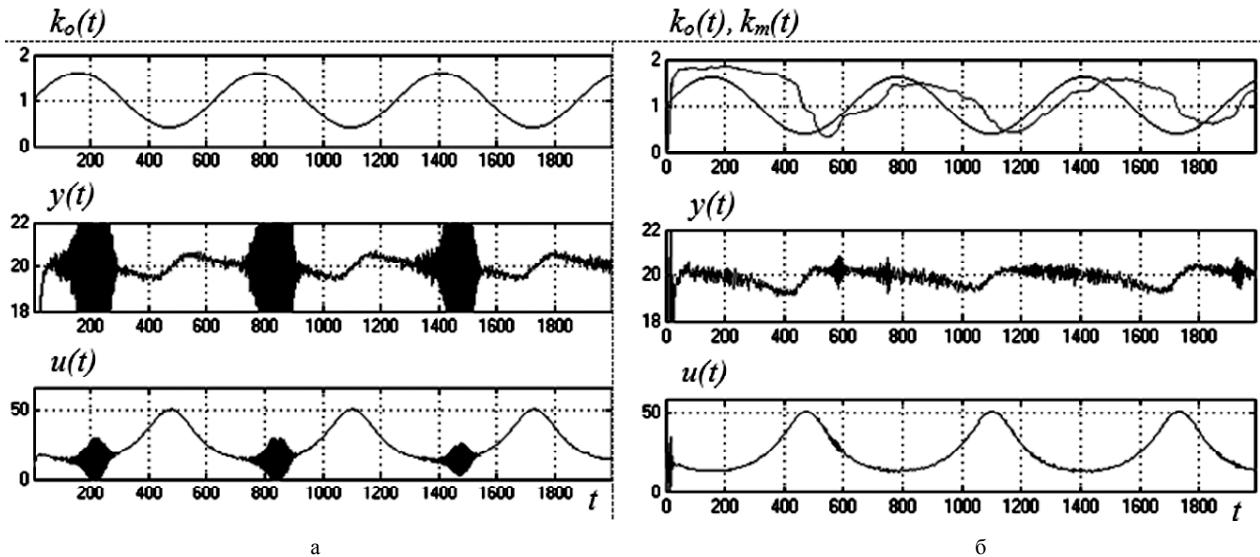


Рисунок 7 – Реализации во времени изменений координат под влиянием изменений  $k_o(t)$  ОУ: а – САР; б – САРС

Таблица 1 – Результаты моделирования по определению влияния изменений спектрального состава координатных возмущений  $f_k(t)$  и шумов  $f_n(t)$  на показатели качества работы САРС

$N_{\text{варианта}}$	Модели возмущений и шумов (см. рис. 2)	Фрагменты реализаций $k_o(t)$ , $k_m(t)$	Значения оценок критериев
1	$f_k(t) \rightarrow (4)$ $f_n(t) \rightarrow (7)$		$\hat{I}_1 = 0,108$ $\hat{I}_2 = 0,61 \cdot 10^{-3}$ $\hat{I}_3 = 0,199$ $\hat{r}_{\tilde{y}_a \tilde{y}_{ma}} = 0,66$
2	$f_k(t) \rightarrow (3)$ $f_n(t) \rightarrow (7)$		$\hat{I}_1 = 0,116$ $\hat{I}_2 = 0,27 \cdot 10^{-3}$ $\hat{I}_3 = 0,252$ $\hat{r}_{\tilde{y}_a \tilde{y}_{ma}} = 0,54$
3	$f_k(t) \rightarrow (5)$ $f_n(t) \rightarrow (7)$		$\hat{I}_1 = 0,164$ $\hat{I}_2 = 1,13 \cdot 10^{-3}$ $\hat{I}_3 = 0,318$ $\hat{r}_{\tilde{y}_a \tilde{y}_{ma}} = 0,7$
4	$f_k(t) \rightarrow (4)$ $f_n(t) \rightarrow (6)$		$\hat{I}_1 = 0,121$ $\hat{I}_2 = 0,64 \cdot 10^{-3}$ $\hat{I}_3 = 0,243$ $\hat{r}_{\tilde{y}_a \tilde{y}_{ma}} = 0,64$
5	$f_k(t) \rightarrow (4)$ $f_n(t) \rightarrow (8)$		$\hat{I}_1 = 0,12$ $\hat{I}_2 = 0,81 \cdot 10^{-3}$ $\hat{I}_3 = 0,193$ $\hat{r}_{\tilde{y}_a \tilde{y}_{ma}} = 0,77$

## 6 ОБСУДЖЕННЯ

Вариант 1 из таблицы является опорным для сравнения, т.к. для него определялись оптимальные значения  $k_{rp}^*, T_{izp}^*, T_{oe}^*, \omega_L^*, \omega_H^*$  параметров контура самонастройки. Варианты 3 и 4 иллюстрируют нарушения принятых условий о низкочастотном характере координатных возмущений  $f_k(t)$  и высокочастотном характере шумов  $f_n(t)$ . Для работы в данных условиях САРС не предназначена. Существенное ухудшение качества самонастройки (увеличение критерия  $I_3$ ) наблюдается для варианта 2, что можно объяснить снижением интенсивности координатного возмущения  $f_k(t)$  (используется модель (3)), в результате чего уменьшается и составляющая собственного движения САР. Для данного варианта необходимо в дальнейшем предусмотреть совершенствование структуры параметрического регулятора. Для варианта 5 наблюдается некоторое улучшение качества самонастройки, о чем можно судить по критерию  $I_3$ . В данном случае уменьшается влияние  $f_n(t)$  на контур самонастройки по сравнению с вариантом 1.

Из рассмотренных критериев интегральный квадратичный показатель ошибки САР (15) наиболее полно характеризует качество ее работы и эффективность самонастройки. Фрагменты реализаций  $k_o(t)$ ,  $k_m(t)$  указывают на существующие неидеальности выделения собственного движения САР, а также на ухудшения качества самонастройки при уменьшении коэффициента передачи ОУ.

## ВЫВОДЫ

Результаты моделирования САРС подтверждают теоретические обоснования возможности идентификации в замкнутом контуре САР изменяющегося коэффициента передачи ОУ за счет выделения собственной составляющей из общего движения регулируемой переменной, которое возникает под воздействием координатных возмущений.

Влияние параметров контура самонастройки на интегральный квадратичный показатель ошибки САР носит экстремальный характер, что делает целесообразной процедуру его оптимального параметрического синтеза.

Контур самонастройки САРС сохраняет работоспособность, в том числе устойчивость, в широком диапазоне изменений спектрального состава координатных возмущений и шумов.

Повышение эффективности самонастройки и работы САРС в целом потенциально возможно за счет отражения в алгоритмах самонастройки объективно сущ-

ствующих неидеальностей выделения собственного движения САР и фактически изменяющего коэффициента передачи контура самонастройки при изменении размаха колебаний регулируемой переменной ОУ.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в соответствии с планом госбюджетной тематики научной школы «Моделирование и оптимальное управление технологическими процессами хранения и переработки сельскохозяйственной продукции» Одесской национальной академии пищевых технологий при поддержке компании С-инжиниринг, г. Одесса.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Хобін В. А. Системы гарантирующего управления технологическими агрегатами: основы теории, практика применения / В. А. Хобін. – Одеса : «ГЭС», 2008. – 306 с.
- Изерман Р. Цифровые системы управления: пер. англ. / Р. Изерман. – М. : Мир, 1984. – 541 с.
- Основы автоматического регулирования / [М. А. Айзерман, Д. А. Башкиров, П. В. Бромберг и др.]; под ред. В. В. Соловьевика. – М. : Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы «Машгиз», 1954. – 1117 с.
- Александров А. Г. Состояние и перспективы развития адаптивных ПИД-регуляторов в технических системах [Электронный ресурс] / А. Г. Александров, М. В. Паленов. – Режим доступа: <http://adaplab.ru/papers/alex/UKI12.pdf>
- Авторское свидетельство SU 1241192 A1 СССР, G 05 В 13/02. Самонастраиваясь система / В. А. Хобін, А. Г. Плеве ; заявитель Одесский технологический институт пищевой промышленности им. М. В. Ломоносова. – № 3821296/24-24; заявл. 06.12.84; опубл 30.06.86. Бюл. 24. – 7 с.
- Патент на корисну модель UA36671 Україна, МПК<sup>2006</sup> G05B13/02. Самоналагоджувальна система / В. А. Хобін, О. А. Марчук (Україна); заявник Одеська національна академія харчових технологій. – № u200801328; заявл. 04.02.2008; опубл. 10.11.2008. Бюл. 21. – 5 с.
- Khobin V. A. Filters research for free motion extraction in self tuning automatic control systems / V. A. Khobin, M. V. Levinskyi // ATBP journal. – 2016. – № 3 (27). – P. 5–16.
- Левінський М. В. Тестові САР для дослідження алгоритмів їх самоналаштування / М. В. Левінський // Наукові праці ОНАХТ : наукове видання. – Одеса : 2015. – Вип. 48. – С. 142–146.
- Титце У. Полупровідниковая схемотехника. Т. II. / У. Титце, К. Шенк. – М. : Іздательство ДМК, 2007. – 942 с.
- Куликов Е. И. Методы измерения случайных процессов / Е. И. Куликов. – М. : Радио и связь, 1986. – 282 с.
- Лившиц Н. А. Вероятностный анализ систем автоматического управления / Н. А. Лившиц, В. Н. Пугачев. – М. : Издательство «Советское радио», 1963. – 896 с.

Статья поступила в редакцию 24.11.2016.

После доработки 01.12.2016.

Хобін В. А.<sup>1</sup>, Левінський М. В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри автоматизації технологічних процесів і робототехнічних систем Одеської національної академії харчових технологій, Одеса, Україна

<sup>2</sup>Аспірант кафедри автоматизації технологічних процесів і робототехнічних систем Одеської національної академії харчових технологій, Одеса, Україна

## ОПТИМІЗАЦІЯ ФІЛЬТРІВ ВЛАСНОГО РУХУ САМОНАЛАГОДЖУВАЛЬНОЇ САУ ОБ'ЄКТОМ ТЕХНОЛОГІЧНОГО ТИПУ

Технологічні процеси як об'єкти керування характеризуються істотним запізненням реакції керованих змінних на керуючі впливи і великою кількістю мінливих факторів, які впливають на процес, але практично недоступні для вимірювання. Ці особливості на практиці часто приводять до істотного погрішенння роботи систем керування з типовими алгоритмами й суттєво ускладнюють побудову самоналагоджувальних систем керування для даного типу об'єктів. Фактори, залежно від наслідків їх прояву на об'єкті керування, підрозділяють на неконтрольовані координатні й параметричні збурення. У статті розглядається випадок, коли спектральний склад параметричних

збурень є суттєво більш низькочастотним у порівнянні зі спектральним складом координатних збурень. Фактори, що викликають високочастотні зміни керованих змінних, які не можуть бути скомпенсовані керуючими впливами, розглядаються як шуми. Для об'єктів технологічного типу, у яких параметричні збурення викликають зміни коефіцієнта передачі, запропонована структура самоналагоджувальної системи автоматичного керування. На відміну від багатьох відомих, принцип її роботи припускає пасивну ідентифікацію змін коефіцієнта передачі в замкнутому контурі. Із загального руху замкнутої системи, який виникає під впливом координатних збурень, за допомогою смугових фільтрів виділяється складова власного руху. По змінах у спектрі цієї складової контур самоналагодження визначає поточні значення коефіцієнта передачі об'єкта керування й змінює коефіцієнт передачі регулятора системи стабілізації для збереження стійкої її роботи. Проведені комп'ютерні експерименти по оцінці впливу змін спектрального складу координатних збурень і шумів на якість самоналагодження, показана можливість проведення оптимального параметричного синтезу системи, запропоновані рекомендації з наближеного визначення параметрів контуру самоналагодження.

**Ключові слова:** самоналагоджувальна САК, коефіцієнт передачі, власний рух, смуговий фільтр, оптимальний параметричний синтез.

Khobin V. A.<sup>1</sup>, Levinskyi M. V.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Dr.Sc., Professor, Head of a Chair of Automation of Technological Processes and Robot-technical Systems Department of the Odessa national academy of food technologies, Odessa, Ukraine

<sup>2</sup>Post-graduate of Automation of Technological Processes and Robot-technical systems Department of the Odessa national academy of food technologies, Odessa, Ukraine

## OWN MOTION FILTERS OPTIMISATION FOR SELF-TUNING ACS WITH THE TECHNOLOGICAL TYPE OF CONTROL OBJECT

Technological processes as control objects are characterized by substantial delay in controlled variables response to control action and considerable quantity of varying factors, which have influence on the process, but, practically, inaccessible for measurement. These specifics, in practice, often lead to substantial decrease in operation quality of the control system with typical algorithms and significantly make it harder to design and develop self-tuning control systems for these types of control objects. Factors, depending on the sequences of the impacts they have on the control object, are subdivided into non-controllable coordinate and parametric disturbances. In this article the case is considered, when spectral composition of parametric disturbances is substantially lower in frequency range in comparison to coordinate disturbances spectral composition. Factors, which cause high-frequency changes in controlled variables, which cannot be compensated by the control actions, are considered as noises. For control objects of technological type, in which transition coefficient changes under the influence of parametric disturbances, the structure of self-tuning automatic control system is proposed. Unlike many known, principle of its operation includes passive identification of the transition coefficient changes in the closed-loop circuit. From the overall movement of the closed-loop system, which arises under the influence of the coordinate disturbances, the part of the own motion of the system is being separated utilizing band pass filters. By detecting the changes in spectrum of this component, self-tuning loop determines current value of control object transition coefficient and changes the value of controller transition coefficient in the stabilization circuit for maintaining the stable operation of the system. Computer experiments for evaluation of how coordinate disturbances and noises spectral composition change influence the quality of self-tuning were carried out, the possibility of carrying out the optimal parametric synthesis of the system is shown, recommendations for approximate evaluation of the self-tuning loop parameters are proposed.

**Keywords:** self-tuning ACS, transition coefficient, own motion, band pass filter, optimal parametric synthesis.

## REFERENCES

1. Hobin V. A. Sistemy garantiruyuscheho upravleniya tehnologicheskimi agregatami: osnovyi teorii, praktika primeneniya. Odessa, «TES», 2008, 306 p.
2. Izerman R. Tsifrovye sistemy upravleniya: per. angl. Moscow, Mir, 1984, 541 p.
4. Aleksandrov A. G., Palyonov M. V. Sostoyanie i perspektivy razvitiya adaptivnyh PID-regulyatorov v tehnicheskikh sistemah [Elektronnyj resurs]. Rezhim dostupa: <http://adaplab.ru/papers/alex/UKI12.pdf>
5. Hobin V. A., Pleve A. G. Avtorskoe svidetelstvo SU 1241192 A1 SSSR, G 05 B 13/02. Samonastraivayuschaya sistema, zayavitel Odesskij tehnologicheskij institut pischevoj promyshlennosti im. M. V. Lomonosova. № 3821296/24-24; zayav. 06.12.84; opubl. 30.06.86. Byul. 24, 7 p.
6. Hobin V. A., Marchuk O. A. (Ukraina) Patent na korysnu model 36671 Ukraina, MPK<sup>2006</sup> G05B13/02. Samonalagodzhuvalna sistema; zayavnyk Odeska natsionalna akademiya harchovyh tehnologij. № u200801328; zayavl. 04.02.2008; opubl. 10.11.2008. Byul. 21, 5 p.
7. Khobin V. A., Levinskyi M. V. Filters research for free motion extraction in self tuning automatic control systems, *ATBPjournal*, 2016, No. 3 (27), pp. 5–16.
8. Levinskyi M. V. Testovi SAR dlya doslidzhennya algoritmu yih samonalashtuvannya, , *Naukovi pratsi ONAHT: naukove vidannya*. Odesa, 2015, Vyp. 48, pp. 142–146.
9. Tittse U., Shenk K. Poluprovodnikovaya shemotekhnika. T. II. Moscow, Izdatelstvo DMK, 2007, 942 p.
10. Kulikov E. I. Metody izmerenija sluchaynyih protsessov. Moscow, Radio i svyaz, 1986, 282 p.
11. Livshits N. A., Pugachyov V. N. Veroyatnostnyiy analiz sistem avtomaticheskogo upravleniya. Moscow, Izdatelstvo «Sovetskoe radio», 1963, 896 p.

*Наукове видання*

**Радіоелектроніка,  
інформатика,  
управління**

**№ 4/2016**

**Науковий журнал**

Головний редактор – д-р фіз.-мат. наук В. В. Погосов

Заст. головного редактора – д-р техн. наук С. О. Субботін

Комп'ютерне моделювання та верстання  
Редактор англійських текстів

С. В. Зуб  
С. О. Субботін

Оригінал-макет підготовлено у редакційно-видавничому відділі ЗНТУ

Свідоцтво про державну реєстрацію  
КВ № 6904 від 29.01.2003.

*Підписано до друку 14.12.2016. Формат 60×84/8.  
Папір офс. Різogr. друк. Ум. друк. арк. 15,11.  
Тираж 300 прим. Зам. № 1229.*

69063, м. Запоріжжя, ЗНТУ, друкарня, вул. Жуковського, 64

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
ДК № 2394 від 27.12.2005.